Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 4

Abgabe bis Mittwoch (23.03.2022) um 10:15 Uhr

Diese Übungsserie beschäftigt sich mit diskreten und stetigen Zufallsvariablen. In Aufgabe 4.3 geht es um eine Anwendung der Exponentialverteilung und in Aufgabe 4.4 um die Frage, wann die Verteilungsfunktion linksseitig stetig ist. In der Perkolationsaufgabe 4.5 zeigen wir, dass der kritische Parameter des Quadratgitters strikt kleiner als 1 ist.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 4.1 [**Diskrete Zufallsvariable: Verteilungsfuntion und Gewichtsfunktion**]
Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 1, \\ 1/5, & \text{falls } 1 \le a < 4, \\ 3/4, & \text{falls } 4 \le a < 6, \\ 1, & \text{falls } 6 \le a. \end{cases}$$

(a) Skizziere die Verteilungsfunktion von X.

(b) Zeige, dass X eine diskrete Zufallsvariable ist.

(c) Berechne die Gewichtsfunktion von X und skizziere diese.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[X = 6],\ \mathbb{P}[X = 5],\ \mathbb{P}[2 < X < 5.5],\ \mathbb{P}[0 \le X < 4].$$

Aufgabe 4.2 [**Stetige Zufallsvariablen: Verteilungsfunktion und Dichte**]
Sei T eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_T(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a < 0, \\ 1 - e^{-2a}, & \text{falls } a \ge 0. \end{cases}$$

(a) Skizziere die Verteilungsfunktion von T.

(b) Zeige, dass T eine stetige Zufallsvariable ist.

(c) Bereche die Dichte von T.

(d) Berechne die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[T = 2],\ \mathbb{P}[T \le 1],\ \mathbb{P}[T \ge 2],\ \mathbb{P}[1 < T < 4].$$

Aufgabe 4.3 [Anwendung der Exponentialverteilung]
Wir betrachten eine Messsonde an einem Vulkankrater, welche den bevorstehenden Ausbruch beobachten soll. Ab Beginn der Messungen gehen wir davon aus, dass die Sonde innerhalb von einer Minute mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{20}$ wegen zu grosser Beschädigung ausfällt. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Lebensdauer der Sonde in Minuten. Es gilt $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$, d.h. Y ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Bestimme λ.

Hinweis: Falls Du a) nicht gelöst hast, so rechne für die weiteren Teilaufgaben mit $\lambda = -\ln(0.95)$.

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt?

(c) Wir wissen, dass die Sonde schon mehr als 20 Minuten überlebt hat. Wie gross ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde nochmals 10 Minuten überlebt?

Aufgabe 4.4 [Verteilungsfuntion: (Un-)Stetigkeitsstellen]
Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Gemäss Theorem 2.4 ist die Verteilungsfunktion von X an jeder Stelle rechtsseitig stetig. In dieser Aufgabe beantworten wir die Frage, an welchen Stellen F_X auch linksseitig stetig (und somit stetig) ist. Zur Erinnerung: F_X ist *linksseitig stetig* an der Stelle $a \in \mathbb{R}$, falls

$$F_X(a-) := \lim_{h \downarrow 0} F_X(a-h) = F_X(a).$$

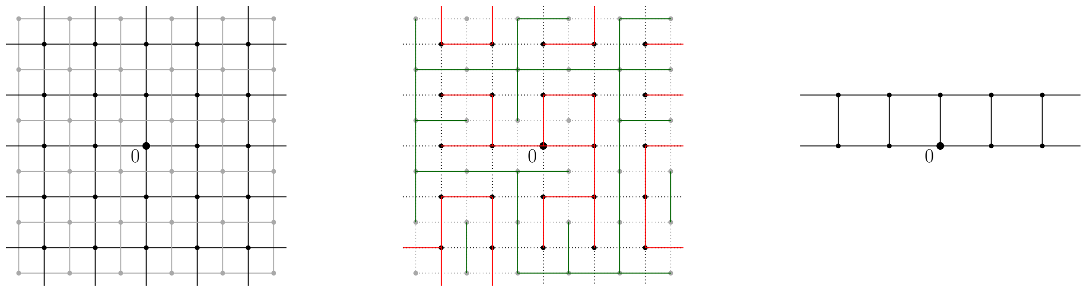
(a) Zeige, dass

$$\mathbb{P}[X = a] = F_X(a) - F_X(a-) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Nutze die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses aus Proposition 1.11.

(b) Schlussfolgere, dass F_X an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ stetig ist genau dann, wenn $\mathbb{P}[X = a] = 0$ gilt.

Aufgabe 4.5 [Perkolation auf unendlichen Graphen: kritischer Parameter p_c]



(a) Darstellung eines Ausschnitts des Quadratgitters G und des dualen Graphen $G^\star$

(b) Perkolation: offene Kanten des Graphen G in rot, offene Kanten des dualen Graphen $G^\star$ in grün.

(c) Darstellung eines Ausschnitts des Graphen $\mathbb{Z} \times \{0,1\}$

Abbildung 1

In Aufgabe 3.5 haben wir Perkolation mit Parameter $p \in [0,1]$ auf dem unendlichen Graphen $G = (\mathbb{Z}^2, E)$ definiert, indem wir unabhängige, Ber(p)-verteilte Zufallsvariablen $(X_e)_{e \in E}$ betrachtet haben. Wir haben die monoton wachsende Funktion $\theta : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$\theta(p) := \mathbb{P}[0 \leftrightarrow \infty] = \lim_{m \to \infty} \mathbb{P}[\exists \text{ einen offenen Pfad } \gamma \text{ der Länge } m, \text{ der bei 0 startet}]$$

eingeführt, den kritischen Parameter

$$p_c(\mathbb{Z}^2) := \sup\{p \in [0,1] : \theta(p) = 0\}$$

definiert und gezeigt, dass $p_c(\mathbb{Z}^2) > 0$ gilt. Wir wollen nun zeigen, dass $p_c(\mathbb{Z}^2) < 1$ gilt.

Wie in Aufgabe 1.4 definieren wir Perkolation auf dem dualen Graphen $G^\star = (V^\star, E^\star)$ (siehe Abbildung 1a) wie folgt: Jede Kante $e \in E$ schneidet genau eine Kante $e^\star \in E^\star$. Somit können wir eine Familie von Zufallsvariablen $(X_{e^\star})_{e^\star \in E^\star}$ durch

$$X_{e^\star} := 1 - X_e$$

definieren. Eine Kante $e^\star$ im dualen Graphen ist also genau dann offen ($X_{e^\star} = 1$), wenn die Kante e, die $e^\star$ schneidet, geschlossen ist ($X_e = 0$). Dies ist in Abbildung 1b dargestellt.

(a) Sei $p \in [0,1]$. Zeige, dass

$$\mathbb{P}[\exists \text{ einen offenen Kreis der Länge } m \text{ in } G^\star, \text{ der 0 umkreist}] \leq m \cdot 4^m \cdot (1-p)^m.$$

(b) Zeige, dass es $p' < 1$ gibt, sodass

$$\mathbb{P}[\exists \text{ einen offenen Kreis in } G^\star, \text{ der 0 umkreist}] \leq 1/2.$$

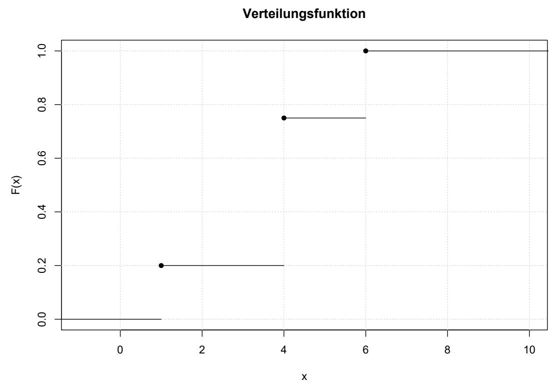
Schlussfolgere, dass $p_c(\mathbb{Z}^2) \leq p' < 1$ gilt.

Wir haben nun gezeigt, dass $0 < p_c(\mathbb{Z}^2) < 1$, d.h. Perkolation auf dem Quadratgitter $\mathbb{Z}^2$ hat einen Phasenübergang von dem Parameterregime $[0, p_c)$, indem das Ereignis $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ *nie* eintritt, zu dem Parameterregime $(p_c, 1]$, indem das Ereignis $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ mit *positiver* Wahrscheinlichkeit eintritt. Die folgende Teilaufgabe zeigt, dass dies nicht für jeden unendlichen Graphen der Fall ist.

(c) Betrachte Perkolation auf dem unendlichen Graphen $H = (\mathbb{Z} \times \{0,1\}, E)$, der in Abbildung 1c dargestellt ist. Analog können wir auch hier die Funktion θ und den kritischen Parameter $p_c(\mathbb{Z} \times \{0,1\})$ definieren. Zeige, dass $p_c(\mathbb{Z} \times \{0,1\}) = 1$.

Lösung 4.1

(a) Die folgende Skizze zeigt die Verteilungsfunktion von X:



(b) Wir stellen fest, dass

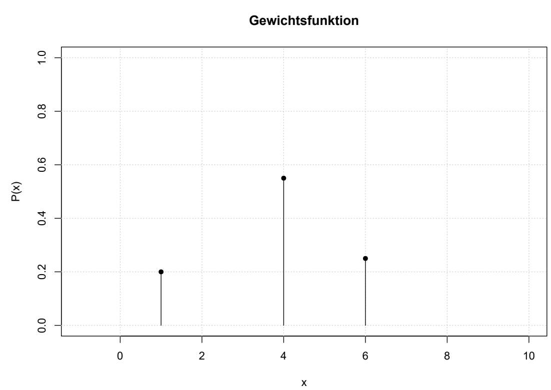
$$\mathbb{P}[X = 1] = 1/5, \quad \mathbb{P}[X = 4] = 3/4 - 1/5 = 11/20, \quad \mathbb{P}[X = 6] = 1/4$$

und $\mathbb{P}[X = x] = 0$ für alle $x \notin \{1, 4, 6\}$. Somit gilt $\mathbb{P}[X \in \{1, 4, 6\}] = 1$ und da die Menge $\{1, 4, 6\}$ endlich ist, ist die Zufallsvariable X diskret.

(c) Die Gewichtsfunktion / Verteilung ist gegeben durch $(p(x))_{x\in\{1,4,6\}}$ mit

$$p(1) = \mathbb{P}[X = 1] = 1/5, \quad p(4) = \mathbb{P}[X = 4] = 3/4-1/5 = 11/20 \quad \text{und } p(6) = \mathbb{P}[X = 6] = 1/4.$$

Diese ist in der folgenden Skizze dargestellt:



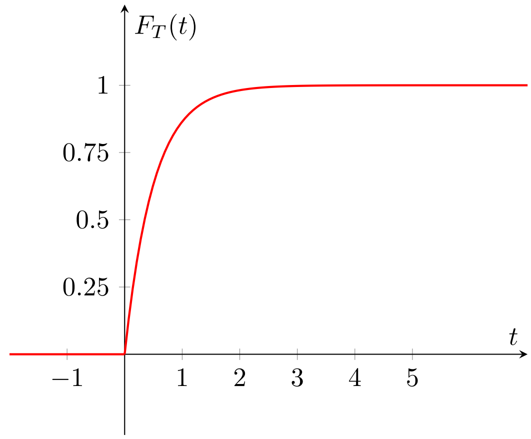
(d) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X = 6] = p(6) = 1/4,\\
&\mathbb{P}[X = 5] = 0,\\
&\mathbb{P}[2 < X < 5.5] = p(4) = 11/20,\\
&\mathbb{P}[0 \leq X < 4] = p(1) = 1/5.
\end{aligned}$$

.

Lösung 4.2

(a) Die folgende Skizze zeigt die Verteilungsfunktion von T:



(b) Wir stellen fest, dass die Verteilungsfunktion F_T stückweise stetig differenzierbar ist. Genauer gesagt ist F_T auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar. Somit folgt aus Theorem 3.27, dass T eine stetige Zufallsvariable ist.

(c) Da F_T stückweise stetig differenzierbar ist, können wir erneut Theorem 3.27 anwenden, um die Dichte von T zu berechnen. Wir erhalten

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0, \\ 2e^{-2t} & \text{falls } t \geq 0, \end{cases}$$

wobei wir den Wert an der Stelle $t = 0$ beliebig gewählt haben.

(d) Da die Zufallsvariable T stetig ist, gilt $\mathbb{P}[T = t] = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (siehe Proposition 3.1 und Aufgabe 4.4). Somit gilt insbesondere

$$\mathbb{P}[T = 2] = 0.$$

Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[T \leq 1] = F_T(1) = 1 - e^{-2}, \\ &\mathbb{P}[T \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[T < 2] = 1 + \underbrace{\mathbb{P}[T = 2]}_{=0} - \underbrace{\mathbb{P}[T \leq 2]}_{=F_T(2)} = e^{-4}, \\ &\mathbb{P}[1 < T < 4] = \mathbb{P}[T < 4] - \mathbb{P}[T \leq 1] = \underbrace{\mathbb{P}[T \leq 4]}_{=F_T(4)} - \underbrace{\mathbb{P}[T = 4]}_{=0} - \underbrace{\mathbb{P}[T \leq 1]}_{=F_T(1)} = e^{-2} - e^{-8}. \end{aligned}$$

Lösung 4.3

(a) Gemäss Annahme in der Aufgabenstellung gilt $\mathbb{P}[Y \leq 1] = \frac{1}{20}$, also $\mathbb{P}[Y > 1] = 0.95$. Aus der Vorlesung wissen wir (siehe Exponentialverteilung in Kapitel 3, Abschnitt 6), dass $\mathbb{P}[T > t] = e^{-\lambda t}$ für eine $\text{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable T. Es muss also gelten

$$0.95 = e^{-\lambda}$$

und somit ist $\lambda = -\ln(0.95)$.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonde mehr als 10 Minuten überlebt, ist

$$\mathbb{P}[Y > 10] = e^{-\lambda \cdot 10} = e^{10 \ln(0.95)} = (0.95)^{10} \approx 0.5987.$$

Alternativ ist

$$P[Y > 10] = 1 - P[Y \leq 10] = 1 - F_Y(10) = 1 - (1 - e^{\ln(0.95)10}) = 0.95^{10}.$$

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist, also dass für alle $s, t \geq 0$ gilt

$$\mathbb{P}[T > t + s | T > t] = \mathbb{P}[T > s].$$

Also folgt, dass

$$\mathbb{P}[Y > 30 | Y > 20] = \mathbb{P}[Y > 10] = 0.95^{10}.$$

Lösung 4.4

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $(h_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Folge mit $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ und $h_n > 0$ für alle $n \geq 1$. Die Folge von Ereignissen $(A_n)_{n\geq 1}$ mit

$$A_n := \{X \leq a - h_n\}$$

ist monoton fallend und somit folgt aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses (siehe Proposition 1.11), dass

$$\lim_{h\downarrow 0} F_X(a-h) = \lim_{n\to\infty} F_X(a-h_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] = \mathbb{P}[X < a],$$

da $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \leq a - h_n\} = \{X < a\}$. Es folgt also, dass

$$F_X(a) - F_X(a-) = F_X(a) - \lim_{h\downarrow 0} F_X(a-h) = \mathbb{P}[X \leq a] - \mathbb{P}[X < a] = \mathbb{P}[X = a].$$

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$.

Falls F_X an der Stelle a stetig ist, so ist F_X an dieser Stelle insbesondere linksseitig stetig und somit gilt per Definition $F_X(a-) = F_X(a)$. Aus Teilaufgabe (a) folgt, dass $\mathbb{P}[X = a] = 0$.

Falls $\mathbb{P}[X = a] = 0$ gilt, so folgt aus Teilaufgabe (a), dass $F_X(a-) = F_X(a)$ und somit ist F_X an der Stelle a linksseitig stetig. Da F_X als Verteilungsfunktion immer auch rechtsseitig stetig ist (siehe Theorem 2.4), folgt die Stetigkeit von F_X an der Stelle a.

Lösung 4.5

(a) Wir beginnen mit den Beobachtung, dass $(X_{e^\star})_{e^\star \in E^\star}$ eine Familie unabhängiger Ber$(1-p)$-verteilter Zufallsvariablen ist und dass der duale Graph $G^\star$ genau dem Quadratgitter verschoben um $(1/2, 1/2)$ entspricht (siehe Abbildung 1a). Wir nehmen nun an, dass es in $G^\star$ einen offenen Kreis der Länge m gibt, der 0 umkreist, und bezeichnen diesen mit $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_m)$, wobei $\gamma_0 = \gamma_m$. Da γ 0 umkreist und Länge m hat, muss $(k + 1/2, 1/2) \in \gamma$ für ein $0 \leq k < m$ gelten. Es folgt also:

$$\begin{aligned}
&\{\exists \text{ einen offenen Kreis der Länge } m \text{ in } G^\star, \text{ der 0 umkreist}\} \\
&\subseteq \bigcup_{k=0}^{m-1} \{\exists \text{ einen offenen Pfad der Länge } m \text{ in } G^\star, \text{ der bei } (k+1/2, 1/2) \text{ startet}\}
\end{aligned}$$

Analog zu Aufgabe 2.1(c) gilt für $0 \leq k < m$,

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ einen offenen Pfad der Länge } m \text{ in } G^\star, \text{ der bei } (k+1/2, 1/2) \text{ startet}\right] \leq 4^m (1-p)^m$$

und somit erhalten wir mit dem Union bound

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\exists \text{ einen offenen Kreis der Länge } m \text{ in } G^{\star}, \text{ der 0 umkreist}\right] \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} 4^m (1-p)^m = m \cdot 4^m (1-p)^m
\end{aligned}$$

(b) Wir stellen zunächst fest, aus Aufgabenteil (a) und einem erneuten Union bound für beliebiges $p \in [0,1]$ folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[\exists \text{ einen offenen Kreis in } G^{\star}, \text{ der 0 umkreist}\right] \\
&\leq \sum_{m=4}^{\infty} \mathbb{P}\left[\exists \text{ einen offenen Kreis der Länge } m \text{ in } G^{\star}, \text{ der 0 umkreist}\right] \\
&\leq \sum_{m=4}^{\infty} m \cdot 4^m (1-p)^m,
\end{aligned}$$

wobei die Summe bei 4 anfängt, da jeder Kreis in $G^{\star}$ um 0 mindestens Länge 4 haben muss. Für $p > 3/4$ gilt

$$f(p) := \sum_{m=4}^{\infty} m \cdot 4^m (1-p)^m < \infty$$

und als Potenzreihe ist f auf $(3/4, 1]$ stetig. Da $f(1) = 0$, können wir $p' < 1$ gross genug wählen, sodass $f(p') \leq 1/2$.

Auf dem Ereignis, dass es keinen offenen Kreis in $G^{\star}$, der um 0 umkreist, gibt es einen unendlichen Pfad in G, der bei 0 startet. Somit folgt für den Parameter p'

$$\theta(p') = \mathbb{P}[0 \leftrightarrow \infty] \geq 1 - \underbrace{\mathbb{P}\left[\exists \text{ einen offenen Kreis in } G^{\star}, \text{ der 0 umkreist}\right]}_{\leq 1/2} \geq 1/2.$$

Da die Funktion θ monoton wachsend ist, folgt $p_c(\mathbb{Z}^2) \leq p' < 1$.

(c) Wir betrachten nun Perkolation auf dem unendlichen Graphen $H = (\mathbb{Z} \times \{0,1\}, E)$, der in Abbildung 1c dargestellt ist, und wollen zeigen, dass $p_c(\mathbb{Z} \times \{0,1\}) = 1$. Hierzu genügt es zu zeigen, dass $\theta(p) = 0$ für alle $p < 1$ gilt. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}
\theta(p) &:= \mathbb{P}\left[0 \leftrightarrow \infty\right] := \lim_{m \to \infty} \mathbb{P}\left[\exists \text{ einen offenen Pfad in } H \text{ der Länge } m, \text{ der bei 0 startet}\right] \\
&= \mathbb{P}\Bigg[\underbrace{\bigcap_{m=1}^{\infty} \left\{\exists \text{ einen offenen Pfad in } H \text{ der Länge } m, \text{ der bei 0 startet}\right\}}_{=\{\exists \text{ einen unendlichen offenen Pfad in } H, \text{ der bei 0 startet}\}}\Bigg],
\end{aligned}$$

wobei wir die Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmasses aus Proposition 1.11 verwendet haben. Wir wollen also zeigen, dass $\mathbb{P}[\exists \text{ einen unendlichen offenen Pfad in } H, \text{ der bei 0 startet}] = 0$ für alle $p < 1$ gilt.

Für $k \geq 0$ definieren wir die Ereignisse

$$\begin{aligned}
A_k^+ &:= \{\text{Die Kanten } \{(k,0),(k+1,0)\} \text{ und } \{(k,1),(k+1,1)\} \text{ sind geschlossen}\} \\
A_k^- &:= \{\text{Die Kanten } \{(-k,0),(-k-1,0)\} \text{ und } \{(-k,1),(-k-1,1)\} \text{ sind geschlossen}\}
\end{aligned}$$

Wenn das Ereignis $A_k^+ \cap A_k^-$ eintritt, muss jeder offenen Pfad, der bei 0 startet, vollständig in $\{-k, \ldots, k\} \times \{0,1\}$ liegen, und somit ist die Länge des Pfades von oben beschränkt.

Insbesondere kann es keinen unendlichen Pfad geben, der bei 0 startet. Somit schlussfolgern wir

$$\begin{aligned}\theta(p) &\leq 1 - \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k^+ \cap A_k^-)] = \mathbb{P}[\bigcap_{k=1}^{\infty}(A_k^+ \cap A_k^-)^{\mathsf{c}}] \\ &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1 - \underbrace{\mathbb{P}[A_k^+ \cap A_k^-]}_{=(1-p)^4>0}) = 0,\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass die Ereignisse $(A_k^+ \cap A_k^-)_{k\geq 1}$ unabhängig sind.