Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 5

Abgabe bis Mittwoch (30.03.2022) um 10:15 Uhr

Diese Übungsserie beschäftigt sich mit dem Erwartungswert diskreter und stetiger Zufallsvariablen. In Aufgabe 4.4 geht es ausserdem um die Charakterisierung der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit Hilfe des Erwartungswerts.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 5.1 [Erwartete Laufzeit eines Algorithmus I]
In dieser Aufgabe betrachten wir erneut den Algorithmus aus Aufgabe 3.1:

$$
\begin{array}{l}
i = 1 \\
\textbf{While} \quad X_i = X_{i+1} = 1 \quad \textbf{do} \\
\qquad\quad i = i + 2 \\
\textbf{endwhile} \\
Z = X_i + 2 \cdot X_{i+1} \\
\textbf{Return} \quad Z
\end{array}
$$

Zur Erinnerung: $(X_i)_{i\geq 1}$ ist eine unendliche Folge von unabhängigen, Ber(1/2)-verteilten Zufallsvariablen und aus 3.1 (a) und (b) wissen wir, dass dieser Algorithmus immer nach endlich vielen Schritten terminiert und eine gleichverteilte Zufallsvariable in $\{0, 1, 2\}$ ausgibt.

(a) Sei T die Laufzeit des Algorithmus, also die Anzahl der Durchläufe der While-Schleife. Berechne die erwartete Laufzeit $\mathbb{E}[T]$.
Hinweis: Verwende die "Tailsum Formel" aus Proposition 4.15.

(b) Um drei unabhängige Zufallsvariablen zu erhalten, die gleichverteilt in $\{0, 1, 2\}$ sind, führen wir den Algorithmus dreimal hintereinander aus. Was ist die erwartete Laufzeit?

Aufgabe 5.2 [Erwartungswert stetiger ZVen I]
Nehmen wir an, dass $-\infty < a < b < \infty$ und $c > 0$.

(a) Sei $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Berechne die Dichte von $U' := a + (b - a)U$. Was ist der Erwartungswert von U'?

(b) Sei $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$. Berechne die Dichte von $T' := c \cdot T^2$. Was ist der Erwartungswert von T'?
Hinweis: Nutze die Charakterisierung stetiger Zufallsvariablen aus Proposition 4.16.

Aufgabe 5.3 [Erwartungswert stetiger ZVen II]
Sei $r > 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ cx^{-r} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

für ein $c > 0$.

(a) Bestimme die Konstante c, sodass f zu einer Dichtefunktion wird.

(b) Wir nehmen ab jetzt an, dass die Konstante so bestimmt ist, dass f zu einer Dichtefunktion wird. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X = f$. Berechne die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechne den Erwartungswert von X. Für welche Werte von r ist der Erwartungswert endlich?

Aufgabe 5.4 [Charakterisierung der Unabhängigkeit von ZVen]
Seien T_1, T_2, T_3 drei unabhängige Zufallsvariablen mit

$$T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Definiere die Zufallsvariable $S := T_1 \cdot T_2$.

(a) Berechne den Erwartungswert von S.
Hinweis: Nutze Theorem 4.13, also dass für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y gilt $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$, wenn die Erwartungswerte wohldefiniert sind.

(b) Zeige, dass die Zufallsvariablen S und T_3 unabhängig sind.
Hinweis: Nutze das Resultat aus Proposition 2.6 zur Gruppierung von unabhängigen Zufallsvariablen.

Aufgabe 5.5 [Erwartete Laufzeit eines Algorithmus II]
Sei $(X_i)_{i \geq 1}$ eine unendliche Folge von unabhängigen, Ber(1/2)-verteilten Zufallsvariablen. Wir betrachten den folgenden Algorithmus:

$i = 1$
While $\big(X_i = 0 \;||\; X_{i+1} = 0 \;||\; X_{i+2} = 0 \big)$ **do**
 $i = i + 1$
endwhile
$S = i + 2$
Return S

(a) Was gibt der Algorithmus aus?

(b) Zeige, dass
$$\mathbb{E}[S] \leq 24.$$

Lösung 5.1

(a) Die Zufallsvariable T nimmt Werte in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ an. Somit können wir die Tailsum Formel (Proposition 4.15) anwenden und erhalten

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[T \geq j].$$

Wir berechnen nun $\mathbb{P}[T \geq j]$. Für $j \geq 1$ gilt

$$\{T \geq j\} = \{\text{While-Schlaufe wird mindestens } j \text{ Mal durchlaufen}\} = \bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\}.$$

Aus der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $(X_i)_{i \geq 1}$ folgt

$$\mathbb{P}\left[T \geq j\right] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{2j} \{X_i = 1\}\right] = \prod_{i=1}^{2j} \mathbb{P}\left[X_i = 1\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} = \left(\frac{1}{4}\right)^{j}.$$

Somit folgt

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[T \geq j] = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{j}\right) - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Alternativ kann man zeigen, dass die Zufallsvariable $S := T + 1$ Geom(3/4)-verteilt ist. Hieraus folgt ebenfalls (siehe Anwendung der Tailsum Formel im Skript), dass

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[S] - 1 = \frac{1}{\frac{3}{4}} - 1 = \frac{1}{3}.$$

(b) Wir bezeichnen die Laufzeit bei der i-ten Durchführung mit T_i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt für die Gesamtlaufzeit $T' := T_1 + T_2 + T_3$

$$\mathbb{E}[T'] = \mathbb{E}[T_1] + \mathbb{E}[T_2] + \mathbb{E}[T_3] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Lösung 5.2

(a) *Variante 1:* Sei $U' := a + (b - a)U$. Dann gilt für $x \in R$

$$F_{U'}(x) = P[U' \leq x] = P\left[U \leq \frac{x - a}{b - a}\right] = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{x-a}{b-a} < 0, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } 0 \leq \frac{x-a}{b-a} \leq 1, \\ 1 & \text{für } \frac{x-a}{b-a} > 1. \end{cases}$$

Durch Umformen folgt, dass

$$F_{U'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

Also ist $U' \sim \mathcal{U}(a, b)$.

Variante 2: Wir verwenden die Charakterisierung stetiger Zufallsvariablen mit Hilfe des Erwartungswerts aus Proposition 4.16. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Wir definieren $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\psi(x) = \phi(a + (b-a)x)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(U')] = \mathbb{E}[\phi(a + (b-a)U)] = \mathbb{E}[\psi(U)] &\overset{\text{[Prop. 4.9]}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\mathbb{1}_{x\in[0,1]}dx \\ &= \int_0^1 \phi(a + (b-a)x)dx = \int_a^b \phi(y)\frac{1}{b-a}dy = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{y\in[a,b]}dy,\end{aligned}$$

wobei wir die Dichte einer $\mathcal{U}([0,1])$-verteilten ZV aus Definition 3.28 und den Variablenwechsel $y = a + (b-a)x$ mit $\frac{dy}{dx} = b - a$ verwendet haben. Da ϕ beliebig war, folgt aus der Charaktierisierung stetiger Zufallsvariablen mit Hilfe des Erwartungswerts aus Proposition 4.16, dass U' eine stetige Zufallsvariable mit Dichte $f_{U'}(y) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{y\in[a,b]}$, also $\mathcal{U}([a,b])$-verteilt, ist.

In beiden Fällen folgt analog zu Beispiel 1 in Abschnitt 4.3 im Skript, dass

$$\mathbb{E}[U'] = \frac{b+a}{2}.$$

(b) Der Einfachheit halber wählen wir den Ansatz aus Variante 2 in Teilaufgabe (a), also mittels der Charaktierisierung stetiger Zufallsvariablen mit Hilfe des Erwartungswerts aus Proposition 4.16. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt. Wir definieren $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\psi(x) = \phi(c \cdot x^2)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(T')] = \mathbb{E}[\phi(c \cdot T^2)] = \mathbb{E}[\psi(T)] &\overset{\text{[Prop. 4.9]}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{x\geq 0}dx \\ &= \int_0^{\infty} \phi(c \cdot x^2)\lambda e^{-\lambda x}dx = \int_0^{\infty} \phi(y)\lambda e^{-\lambda\sqrt{y/c}}\frac{dy}{2\sqrt{cy}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\frac{\lambda}{2\sqrt{cy}}e^{-\lambda\sqrt{y/c}}\mathbb{1}_{y\geq 0}dy,\end{aligned}$$

wobei wir die Dichte einer $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilten ZV aus Definition 3.29 und den Variablenwechsel $y = c \cdot x^2$ mit $\frac{dy}{dx} = 2cx$ verwendet haben. Da ϕ beliebig war, folgt aus der Charaktierisierung stetiger Zufallsvariablen mit Hilfe des Erwartungswerts aus Proposition 4.16, dass T' eine stetige Zufallsvariable mit Dichte $f_{T'}(y) = \frac{\lambda}{2\sqrt{c\cdot y}}e^{-\lambda\sqrt{y/c}}\mathbb{1}_{y\geq 0}$ ist.

Aufgrund der Lineariät des Erwartungswerts gilt $\mathbb{E}[T'] = \mathbb{E}[cT^2] = c \cdot \mathbb{E}[T^2]$. Wir berechnen nun mittels Proposition 4.9

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T^2] &= \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \underbrace{\left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}dx}_{=\frac{2}{\lambda}\mathbb{E}[T]} \\ &= \frac{2}{\lambda^2},\end{aligned}$$

wobei wir $\mathbb{E}[T] = 1/\lambda$ aus Beispiel 2 in Abschnitt 4.3 verwendet haben. Somit folgt

$$\mathbb{E}[T'] = \frac{2c}{\lambda^2}.$$

Lösung 5.3

(a) Wir bemerken zuerst, dass $f \geq 0$. Damit f zu einer Dichtefunktion wird, muss

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} cx^{-r}dx = c\left[\frac{1}{-r+1}x^{-r+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{c}{r-1}$$

gelten. Mit $c = r-1$ wird somit f zu einer Dichtefunktion.

(b) Die Verteilungsfunktion von X ist

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Für $t \leq 1$ ist

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx = 0,$$

da $f_X(x) = 0$ für $x \leq 1$. Für $t > 1$ ist

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{1}^{t} f_X(x)dx \\ &= \int_{1}^{t} (r-1)x^{-r}dx \\ &= (r-1)\left[\frac{1}{-r+1}x^{-r+1}\right]_{x=1}^{x=t} \\ &= -(t^{-r+1}-1) = 1 - t^{-r+1}. \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion F_X ist demnach gegeben durch

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 1, \\ 1 - t^{-r+1} & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

(c) Wir stellen zuerst fest, dass $\mathbb{P}[X \geq 1] = 1$ und somit ist der Erwartungswert von X wohldefiniert, da X positive Werte annimmt. Wir berechnen für $r \neq 2$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx &= \int_{1}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx \\ &= \int_{1}^{+\infty} (r-1)x^{-r+1}dx \\ &= (r-1)\left[\frac{1}{-r+2}x^{-r+2}\right]_1^{\infty} \\ &= \begin{cases} \frac{r-1}{r-2}, & \text{falls } r > 2, \\ \infty, & \text{falls } r \in (1,2). \end{cases} \end{aligned}$$

Für $r = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx &= \int_{1}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx \\ &= \int_{1}^{+\infty} (r-1)x^{-1}dx \\ &= (r-1)\left[\log(x)\right]_1^{\infty} = \infty. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist also endlich, falls $r > 2$.

Lösung 5.4

(a) Wir verwenden Theorem 4.13, also dass für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Somit folgt

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[T_1 \cdot T_2] = \mathbb{E}[T_1] \cdot \mathbb{E}[T_2] = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

(b) Dies folgt aus einem allgemeinen Resultat über die Gruppierung von unabhängigen Zufallsvariablen (siehe Proposition 2.6). Wir definieren $\phi_1(x, y) = x \cdot y$ und $\phi_2(x) = x$. Da T_1, T_2, T_3 nach Annahme unabhängig sind, folgt dass

$$S = T_1 \cdot T_2 = \phi_1(T_1, T_2) \quad \text{und} \quad T_3 = \phi_2(T_3)$$

unabhängig sind.

$$\mathbb{E}[\psi_1(S) \cdot \psi_2(T_3)] = \mathbb{E}[\psi_1(T_1 \cdot T_2) \cdot \psi_2(T_3)]$$

Lösung 5.5

(a) Der Algorithmus gibt den kleinsten Wert i aus, sodass $X_{i-2} = X_{i-1} = X_i = 1$, d.h. er findet das erste Auftreten von drei 1er in Folge.

(b) Sei $k \geq 1$. Falls $X_{3i} = X_{3i-1} = X_{3i-2} = 1$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt, so folgt $S \leq 3k$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[S \leq 3k] &\geq \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{k} \{X_{3i} = X_{3i-1} = X_{3i-2} = 1\}] \\
&= 1 - \mathbb{P}[\bigcap_{i=1}^{k} \{X_{3i} = X_{3i-1} = X_{3i-2} = 1\}^{\mathrm{c}}] = 1 - (7/8)^k,
\end{aligned}$$

wobei wir die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen verwendet haben. Somit gilt für $\ell \geq 0$,

$$\mathbb{P}[S > \ell] \leq (7/8)^{\lfloor \ell/3 \rfloor}$$

und es folgt aus der Tailsum Formel

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}[S \geq \ell] = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}[S > \ell] \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} (7/8)^{\lfloor \ell/3 \rfloor} = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot (7/8)^k \\
&= 3 \cdot \frac{1}{1 - 7/8} = 24.
\end{aligned}$$