Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

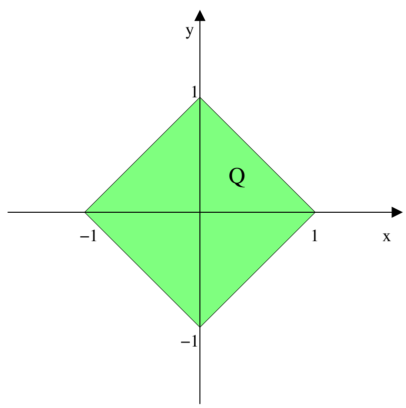
Serie 7

Abgabe bis Mittwoch (13.04.2022) um 10:15 Uhr

Diese Serie beschäftigt sich mit dem Konzept der Kovarianz und mit der gemeinsamen Verteilung stetiger Zufallsvariablen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

Aufgabe 7.1 [Gemeinsame Verteilung stetiger Zufallsvariablen I]
Die gemeinsame Dichte $f(x, y)$ zweier stetiger Zufallsvariablen X, Y sei im Quadrat Q (vgl. Skizze) konstant und verschwinde ausserhalb von Q.



(a) Bestimme die gemeinsame Dichte von (X, Y).

(b) Bestimme die Randdichten f_X und f_Y der Zufallsvariablen X und Y.

(c) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig? Begründe die Antwort mit einem mathematischen Argument!

(d) Was ist die Antwort in (c), wenn das Quadrat Q um 45 Grad gedreht wird?

Aufgabe 7.2 [Gemeinsame Verteilung stetiger ZVen II: Extrema gleichverteilter ZVen]
Seien U_1, U_2, U_3 unabhängige, $\mathcal{U}([0,1])$-verteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die stetigen Zufallsvariablen

$$L := \min(U_1, U_2, U_3) \quad \text{und} \quad M := \max(U_1, U_2, U_3).$$

(a) Berechne die Dichte von M und die Dichte von L.
Hinweis: Berechne $\mathbb{E}[\phi(M)]$ (resp. $\mathbb{E}[\phi(L)]$) für $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt und verwende die Charaktierisierung aus Proposition 4.16.

(b) Zeige, dass für $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt

$$\mathbb{E}[\phi(M) \cdot \psi(L)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(m) \cdot \psi(\ell) \cdot 6(m - \ell) \mathbb{1}_{0 \le \ell \le m \le 1} \, d\ell dm.$$

(c) Nutze (b), um die gemeinsame Verteilungsfunktion und die gemeinsame Dichte von (M, L) zu bestimmen.

Aufgabe 7.3 [Korrelation & Unabhängigkeit]
Für zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y ist aus der Vorlesung bekannt, dass

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0,$$

d.h. die Zufallsvariablen sind unkorreliert. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen nicht gilt.

(a) Sei $X \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi])$. Zeige, dass $Y := \cos(X)$ und $Z := \sin(X)$ unkorreliert sind, d.h.

$$\mathrm{Cov}(Y, Z) = 0.$$

(b) Zeige, dass Y und Z nicht unabhängig sind.

Aufgabe 7.4 [Gemeinsame Verteilung stetiger ZVen III: 2-dim. Normalverteilung]
Seien X_1, X_2 zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})\right),$$

wobei

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

mit $\Sigma_{1,2} = \Sigma_{2,1}$ und $\det(\Sigma) > 0$.

(a) Zeige, dass $\mathrm{Var}(X_1) = \Sigma_{1,1}$, $\mathrm{Var}(X_2) = \Sigma_{2,2}$ und $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \Sigma_{1,2}$.
Hinweis: Benutze, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 - bx)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(\frac{b^2}{4a})$ für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$.

(b) Zeige, dass X_1 und X_2 genau dann unabhängig sind, wenn $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.
Anmerkung: Dies ist eine besondere Eigenschaft der mehrdimensionalen Normalverteilung.

Die Verteilung von $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ wird zweidimensionale Normalverteilung genannt.

Lösung 7.1

(a) Die Fläche von Q ist $4 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = 2$. Mithilfe von Satz 5.9 können wir schliessen, dass die gemeinsame Dichte f durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } (x,y) \in Q, \\ \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben ist.

(b) Für die Randdichte f_X sind 2 Fälle zu unterscheiden. Für $-1 \leq x \leq 0$ gilt

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y\Big|_{-1-x}^{1+x} = \frac{1}{2}(1+x+1+x) = 1+x.$$

Für $0 \leq x \leq 1$ gilt

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-1+x}^{1-x} \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y\Big|_{-1+x}^{1-x} = \frac{1}{2}(1-x+1-x) = 1-x.$$

Also ist

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & \text{falls } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Symmetrie ist $f_Y = f_X$, d.h.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1+y & \text{falls } -1 \leq y \leq 0, \\ 1-y & \text{falls } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Wegen $f_X(x)f_Y(y) \not\equiv \frac{1}{2} = f(x,y)$ folgt aus Theorem 5.11, dass die Zufallsvariablen X und Y abhängig sind.

(d) Dank der Symmetrie kann man immer noch schliessen, dass in diesem Fall die Randdichten gleich sind; zudem sind sie aber auch konstant auf dem Intervall $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, d.h.

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{falls } -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2} = f(x,y)$ folgt in diesem Fall aus Theorem 5.11, dass die Zufallsvariablen X und Y dann unabhängig sind.

Lösung 7.2

(a) *Variante 1:* Wir folgen dem Hinweis und berechnen $\mathbb{E}[\phi(M)]$ für $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und beschränkt.

Hierzu stellen wir zunächst fest, dass die Zufallsvariable U_1 die Dichte $f_1(u) = \mathbb{1}_{u\in[0,1]}$ hat und da U_1, U_2, U_3 unabhängig und identisch verteilt sind, folgt aus Theorem 5.11, dass die drei Zufallsvariablen die gemeinsame Dichte

$$f(u_1,u_2,u_3) = \mathbb{1}_{u_1\in[0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_2\in[0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_3\in[0,1]}$$

haben. Sei nun also $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und beschränkt. Wir berechnen mittels Proposition 5.9

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(M)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\max(u_1,u_2,u_3)\right) \mathbb{1}_{u_1\in[0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_2\in[0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_3\in[0,1]} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \phi\left(\max(u_1,u_2,u_3)\right) du_1 du_2 du_3.\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun verschiedene Fällen, je nachdem welche Variable das Maximum annimmt. Es gilt

$$1 = \sum_{i,j,k:\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \mathbb{1}_{u_i \le u_j \le u_k},$$

wobei wir über die sechs möglichen Permutationen von $(1,2,3)$ summiert haben. Wir berechnen nun das Integral für den Fall $u_3 \le u_2 \le u_1$:

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \phi\left(\max(u_1,u_2,u_3)\right) \mathbb{1}_{u_3\le u_2\le u_1} du_1 du_2 du_3 \\ &= \int_0^1 \phi\left(u_1\right)\left(\int_0^{u_1} \underbrace{\left(\int_0^{u_2} du_3\right)}_{=u_2} du_2\right) du_1 = \int_0^1 \phi\left(u_1\right) \frac{1}{2}u_1^2\, du_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(u_1\right) \frac{1}{2}u_1^2 \mathbb{1}_{u_1\in[0,1]}\, du_1\end{aligned}$$

Da die sechs Fälle symmetrisch sind, erhalten wir

$$\mathbb{E}[\phi(M)] = 6 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(m\right) \frac{1}{2}m^2 \mathbb{1}_{m\in[0,1]}\, dm,$$

und somit ist die Dichte von M gegeben durch $f_M(m) = 3m^2\mathbb{1}_{m\in[0,1]}$.

Um die Dichte von L zu bestimmen, können wir analog zur obigen Berechnung vorgehen und erhalten $f_L(\ell) = 3(1-\ell)^2\mathbb{1}_{\ell\in[0,1]}$. Alternativ können wir feststellen, dass

$$L = \min(U_1,U_2,U_3) = 1 - \max(1-U_1, 1-U_2, 1-U_3).$$

Da $(1-U_1, 1-U_2, 1-U_3)$ aus Symmetriegründen die gleiche gemeinsame Dichte hat wie (U_1,U_2,U_3), hat L die gleiche Dichte wie $1-M$ und auf diese Weise erhält man ebenfalls $f_L(\ell) = 3(1-\ell)^2\mathbb{1}_{\ell\in[0,1]}$.

Variante 2: Wir bestimmen die Verteilungsfunktion und leiten diese dann ab.

Wir bemerken zuerst, dass der Wertebereich von M das Einheitsintervall $[0,1]$ ist. Für $m \in [0,1]$ gilt mit der Unabhängigkeit und der Gleichverteilung von U_1, U_2 und U_3, dass

$$P[M \le m] = P[U_1 \le m, U_2 \le m, U_3 \le m] = (P[U_1 \le m])^3 = m^3.$$

Also ist die Verteilungsfunktion F_M von M gegeben durch

$$F_M(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } m < 0, \\ m^3 & \text{für } 0 \le m \le 1, \\ 1 & \text{für } m > 1. \end{cases}$$

Für $m \in (0,1)$ gilt also

$$f_M(m) = F_M'(m) = 3m^2,$$

und somit ist die Dichte von M gegeben durch

$$f_M(m) = \begin{cases} 0 & \text{für } m < 0, \\ 3m^2 & \text{für } 0 \leq m \leq 1, \\ 0 & \text{für } m > 1. \end{cases}$$

Um die Dichte von L zu bestimmen, kann man analog vorgehen oder wie in Variante 1 die Symmetrie nutzen. In beiden Fällen erhält man $f_L(\ell) = 3(1-\ell)^2 \mathbb{1}_{\ell \in [0,1]}$.

(b) Seien $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und beschränkt. Mittels der gemeinsamen Dichte von U_1, U_2, U_3 aus Teilaufgabe (a) und Proposition 5.9 berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\phi(M) \cdot \psi(L)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\max(u_1, u_2, u_3)\right) \psi\left(\min(u_1, u_2, u_3)\right) \mathbb{1}_{u_1 \in [0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_2 \in [0,1]} \cdot \mathbb{1}_{u_3 \in [0,1]} du_1 du_2 du_3 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(\max(u_1, u_2, u_3)\right) \psi\left(\min(u_1, u_2, u_3)\right) du_1 du_2 du_3.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir für die Anwendung von Proposition 5.9 verwendet, dass $f(u_1, u_2, u_3) := \phi\left(\max(u_1, u_2, u_3)\right) \psi\left(\min(u_1, u_2, u_3)\right)$ eine Funktion von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ definiert.

Wir unterscheiden wieder verschiedene Fällen, je nachdem welche Variable das Maximum und welche das Minimum annimmt. Es gilt

$$1 = \sum_{i,j,k : \{i,j,k\} = \{1,2,3\}} \mathbb{1}_{u_i \leq u_j \leq u_k},$$

wobei wir über die sechs möglichen Permutationen von $(1, 2, 3)$ summiert haben. Wir berechnen nun das Integral für den Fall $u_3 \leq u_2 \leq u_1$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(\max(u_1, u_2, u_3)\right) \psi\left(\min(u_1, u_2, u_3)\right) \mathbb{1}_{u_3 \leq u_2 \leq u_1} du_1 du_2 du_3 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(u_1\right) \psi\left(u_3\right) \mathbb{1}_{u_3 \leq u_2 \leq u_1} du_1 du_2 du_3 \\
&= \int_0^1 \phi\left(u_1\right) \left(\int_0^{u_1} \psi(u_3) \underbrace{\left(\int_{u_3}^{u_1} du_2 \right)}_{= u_1 - u_3} du_3 \right) du_1 \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \phi\left(u_1\right) \psi(u_3)(u_1 - u_3) \mathbb{1}_{u_3 \leq u_1} \, du_1 du_3
\end{aligned}$$

Da die sechs Fälle symmetrisch sind, erhalten wir

$$\mathbb{E}[\phi(M)\psi(L)] = 6 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(m)\psi(\ell)(m - \ell) \mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1} \, dm d\ell,$$

was zu zeigen war.

(c) Für $a, b \in R$ wählen wir $\phi(x) := \mathbb{1}_{x \leq a}$ und $\psi(x) := \mathbb{1}_{x \leq b}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
F_{M,L}(a, b) = \mathbb{P}[M \leq a, L \leq b] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{M \leq a} \cdot \mathbb{1}_{L \leq b}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{m \leq a} \mathbb{1}_{\ell \leq b} \cdot 6(m - \ell) \mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1} \, dm d\ell \\
&= \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} 6(m - \ell) \mathbb{1}_{0 \leq \ell \leq m \leq 1} \, dm d\ell
\end{aligned}$$

und somit folgt gemäss Definition 5.7, dass (M, L) die gemeinsame Dichte

$$f_{M,L}(m,\ell) = 6(m-\ell)\mathbb{1}_{0\le\ell\le m\le 1}$$

hat. Um die Verteilungsfunktion zu erhalten, berechnen wir obiges Integral. Wir stellen zunächst fest, dass die Verteilungsfunktion für $a \notin [0,1]$ oder $b \notin [0,1]$ leicht zu bestimmen ist. Genauer gilt für $a \le 0$ oder $b \le 0$, dass $F_{M,L}(a,b) = 0$, für $b \ge 1$ erhalten wir

$$F_{M,L}(a,b) = F_M(a) = a^3$$

und für $a \ge 1$,

$$F_{M,L}(a,b) = F_L(b) = 1-(1-b)^3.$$

Weiterhin gilt für $0 \le a \le b \le 1$

$$F_{M,L}(a,b) = \mathbb{P}[M \le a, L \le b] \overset{(L\le M)}{=} \mathbb{P}[M \le a] = a^3.$$

Für $1 \le b \le a \le 1$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M \le a, L \le b] &= \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b} 6(m-\ell)\mathbb{1}_{0\le\ell\le m\le 1}\,dm d\ell = \int_0^a \left(\int_0^{\min(b,m)} 6(m-\ell)\,d\ell\right) dm \\
&= \int_0^a \left[6m\ell - 3\ell^2\right]_0^{\min(b,m)} dm = \int_0^b 3m^2\,dm + \int_b^a 3b(2m-b)\,dm \\
&= b^3 + \left[3b(m^2-bm)\right]_b^a = b^3 + 3ab(a-b).
\end{aligned}$$

Lösung 7.3

(a) Wir zeigen zuerst, dass Y und Z unkorreliert sind. Nach Definition der Kovarianz ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y,Z) &= \mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z] \\
&= \mathbb{E}[\cos(X)\sin(X)] - \mathbb{E}[\cos(X)]\mathbb{E}[\sin(X)] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)dx\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx,
\end{aligned}$$

und mit partieller Integration erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx = \left[\sin^2(x)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)\cos(x)dx = -\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x)\cos(x)dx.$$

Also ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx = 0$$

und

$$\mathrm{Cov}(Y,Z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx = 0.$$

Alternativ: Aus $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ folgt, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\sin(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)dx = -\frac{1}{4}[\cos(2x)]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0$$

wegen $\cos(2\pi) = \cos(-2\pi) = 1$.

(b) Wir zeigen nun, dass Y und Z nicht unabhängig sind. Wegen

$$Y^2 + Z^2 = \cos^2(X) + \sin^2(X) = 1$$

ist

$$0 \leq P[Y^2 < 1/2, Z^2 < 1/2] \leq P[Y^2 + Z^2 < 1] = 0.$$

Jedoch ist

$$\begin{aligned}
P[Y^2 < 1/2] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{\cos^2(y) < 1/2\}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{-1/\sqrt{2} < \cos(y) < 1/\sqrt{2}\}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1_{\{\pi/4 < y < 3\pi/4\} \sqcup \{-3\pi/4 < y < -\pi/4\}} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{4} - \frac{-3\pi}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$P[Z^2 < 1/2] = \frac{1}{2}.$$

Angenommen Y und Z sind unabhängig. Dann sind auch Y^2 und Z^2 unabhängig. Wegen

$$P[Y^2 < 1/2, Z^2 < 1/2] = 0 \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P[Y^2 < 1/2] P[Z^2 < 1/2]$$

ist dies jedoch ein Widerspruch. Also sind Y und Z unkorreliert, aber nicht unabhängig.

Lösung 7.4

(a) Die Inverse von Σ ist

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\det(\Sigma)} \begin{pmatrix} \Sigma_{2,2} & -\Sigma_{1,2} \\ -\Sigma_{2,1} & \Sigma_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt aus Proposition 5.10, dass die Randdichte von X_1

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right) dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigg(- \frac{1}{2\det(\Sigma)}\big((x_1-\mu_1)^2\Sigma_{2,2} \\
&\qquad - 2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\Sigma_{1,2} + (x_2-\mu_2)^2\Sigma_{1,1}\big)\Bigg) dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2\det(\Sigma)}\big((x_1-\mu_1)^2\Sigma_{2,2}\right) \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\det(\Sigma)}\left(-2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\Sigma_{1,2} + (x_2-\mu_2)^2\Sigma_{1,1}\right)\right) dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2\det(\Sigma)}\big((x_1-\mu_1)^2\Sigma_{2,2}\right) \\
&\qquad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\det(\Sigma)}\left(-2(x_1-\mu_1)y_2\Sigma_{1,2} + y_2^2\Sigma_{1,1}\right)\right) dy_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2\det(\Sigma)}\big((x_1-\mu_1)^2\Sigma_{2,2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ay_2^2 - by_2\right) dy_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2\det(\Sigma)}(x_1-\mu_1)^2\Sigma_{2,2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\Sigma_{1,1}\det(\Sigma)}\Sigma_{1,1}\Sigma_{2,2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right),
\end{aligned}$$

wobei wir nach der dritten Gleichheit die Variablentransformation $y_2 := x_2 - \mu_2$ gemacht haben, ab der fünften Gleichheit

$$a := \frac{\Sigma_{1,1}}{2\det(\Sigma)} \quad \text{und} \quad b := -(x_1-\mu_1)\frac{\Sigma_{1,2}}{\det(\Sigma)}$$

gesetzt haben und bei der siebten Gleichheit den Hinweis benutzt haben. Insbesondere ist

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) = \sqrt{\frac{2\pi\det(\Sigma)}{\Sigma_{1,1}}} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2\Sigma_{1,2}^2}{\Sigma_{1,1}\det(\Sigma)}\right)$$

und damit ist

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_{1,1}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2(\Sigma_{1,1}\Sigma_{2,2}-\Sigma_{1,2}^2)}{\Sigma_{1,1}\det(\Sigma)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_{1,1}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2\det(\Sigma)}{\Sigma_{1,1}\det(\Sigma)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_{1,1}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\Sigma_{1,1}}\right).
\end{aligned}$$

Wir erkennen nun, dass $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_{1,1})$. Analog zeigt man $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_{2,2})$. (Das ist auch klar aus der Symmetrie des Problems.) Also ist $\mathrm{Var}[X_1] = \Sigma_{1,1}$ und $\mathrm{Var}[X_2] = \Sigma_{2,2}$ sowie $E[X_1] = \mu_1$, $E[X_2] = \mu_2$.

Nach Definition der Kovarianz ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= E\big[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])\big] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2.\end{aligned}$$

Mit der Variablentransformation $y_1 := x_1 - \mu_1$ und $y_2 := x_2 - \mu_2$ folgt, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_1, X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_2y_1 f_{X_1,X_2}(y_1 + \mu_1, y_2 + \mu_2)dy_2dy_1 \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_2y_1 \exp\Bigg(- \frac{1}{2\det(\Sigma)}\big(y_1^2\Sigma_{2,2} \\ &\qquad - 2\Sigma_{1,2}y_1y_2 + y_2^2\Sigma_{1,1}\big)\Bigg)dy_1dy_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 \int_{-\infty}^{\infty} y_2 \exp\Bigg(- \frac{1}{2\det(\Sigma)}\big(y_1^2\Sigma_{2,2} \\ &\qquad - 2\Sigma_{1,2}y_1y_2 + y_2^2\Sigma_{1,1}\big)\Bigg)dy_2dy_1 \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 \int_{-\infty}^{\infty} y_2 \exp\Bigg(- \frac{\Sigma_{1,1}}{2\det(\Sigma)}\Bigg(\left(y_2 - \frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)^2 \\ &\qquad + \frac{\det(\Sigma)}{\Sigma_{1,1}^2}y_1^2\Bigg)\Bigg)dy_2dy_1 \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 \exp\left(-\frac{y_1^2}{2\Sigma_{1,1}}\right)\int_{-\infty}^{\infty} y_2 \exp\Bigg(- \frac{\Sigma_{1,1}}{2\det(\Sigma)} \\ &\qquad \times \left(y_2 - \frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)^2\Bigg)dy_2dy_1,\end{aligned}$$

wobei wir in der vierten Gleichheit

$$y_1^2\Sigma_{2,2} - \left(\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)^2\Sigma_{1,1} = y_1^2\frac{1}{\Sigma_{1,1}}\cdot(\Sigma_{1,1}\Sigma_{2,2} - \Sigma_{1,2}^2) = \frac{\det(\Sigma)}{\Sigma_{1,1}}y_1^2$$

benutzt haben. Nun ist

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} y_2 \exp\left(-\frac{\Sigma_{1,1}}{2\det(\Sigma)}\left(y_2-\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)^2\right)dy_2 \\
&\quad= \int_{-\infty}^{\infty}\left(y_2-\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1+\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)\exp\left(-\frac{\Sigma_{1,1}}{2\det(\Sigma)}\left(y_2-\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)^2\right)dy_2 \\
&\quad= \int_{-\infty}^{\infty}\left(y_2-\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)\exp\left(-\frac{\Sigma_{1,1}}{2\det(\Sigma)}\left(y_2-\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)^2\right)dy_2 \\
&\qquad+\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\Sigma_{1,1}}{2\det(\Sigma)}\left(y_2-\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)^2\right)dy_2 \\
&\quad= \int_{-\infty}^{\infty} z_2\exp\left(-\frac{\Sigma_{1,1}}{2\det(\Sigma)}z_2^2\right)dz_2 \\
&\qquad+\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\Sigma_{1,1}}{2\det(\Sigma)}\left(y_2-\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)^2\right)dy_2 \\
&\quad= 0+\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\frac{\det(\Sigma)}{\Sigma_{1,1}}}\left(y_2-\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)^2\right)dy_2 \\
&\quad= \frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\frac{\sqrt{2\pi\frac{\det(\Sigma)}{\Sigma_{1,1}}}}{\sqrt{2\pi\frac{\det(\Sigma)}{\Sigma_{1,1}}}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\frac{\det(\Sigma)}{\Sigma_{1,1}}}\left(y_2-\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\right)^2\right)dy_2 \\
&\quad= \frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1\sqrt{2\pi\frac{\det(\Sigma)}{\Sigma_{1,1}}}.
\end{aligned}
$$

Die dritte Gleichheit folgt durch die Variablentransformation $z_2 := y_2 - \frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}y_1$, die vierte Gleichheit gilt, weil der Integrand im ersten Integral ungerade ist, und bei der letzten Gleichheit haben wir benutzt, dass das Integral und der Nenner vor dem Integral das Integral über die Dichte einer Normalverteilung ist. Somit ist

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_1,X_2) &= \frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_{1,1}}}\int_{-\infty}^{\infty} y_1^2\exp\left(-\frac{y_1^2}{2\Sigma_{1,1}}\right)dy_1 \\
&= \frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_{1,1}}}\int_{-\infty}^{\infty}(z_1-\mu_1)^2\exp\left(-\frac{(z_1-\mu_1)^2}{2\Sigma_{1,1}}\right)dz_1 \\
&= \frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}\operatorname{Var}[X_1] \\
&= \frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}}\Sigma_{1,1} \\
&= \Sigma_{1,2}.
\end{aligned}
$$

Hier haben wir bei der zweiten Gleichheit die Variablentransformation $z_1 := y_1 + \mu_1$ verwendet.

(b) Aus der Vorlesung ist schon bekannt, dass $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = 0$, falls X_1 und X_2 unabhängig sind. Nehmen wir also an, dass $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \Sigma_{1,2} = \Sigma_{2,1} = 0$. Man rechnet leicht nach, dass dann

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \quad \text{für alle } (x_1,x_2)\in\mathbb{R}$$

gilt. Also sind X_1 und X_2 unabhängig.