Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 10

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (09.05.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (10.05.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit der Maximum-Likelihood-Methode und wendet diese für die geometrische Verteilung und die Exponentialverteilung an.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $\Theta = [0,1]$. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, wobei $X_1,\ldots,X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_1 \sim \mathrm{Geom}(\theta)$. Was ist die Likelihood-Funktion $L(x_1,\ldots,x_n;\theta)$ für $x_1,\ldots,x_n \in \{1,2,\ldots\}$?

(a) $(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n}$

Leider nicht.

(b) $\theta^n \cdot (1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n}$

Leider nicht.

√ (c) $\theta^n \cdot (1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n}$

Richtig!

(d) $(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n}$

Leider nicht.

Für eine $\mathrm{Geom}(\theta)$-verteilte Zufallsvariable X (unter $\mathbb{P}_\theta$) gilt $\mathbb{P}_\theta[X=x] = \theta\cdot(1-\theta)^{x-1}$ für alle $x \in \{1,2,\ldots\}$. Da die Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig sind, erhält man die Likelihood-Funktion

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \mathbb{P}_\theta[X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_\theta[X_i=x_i] = \theta^n\cdot(1-\theta)^{x_1+\ldots+x_n-n}.$$

2. Weiterhin sei $\Theta = [0,1]$ und $X_1, \ldots, X_n$ seien unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Geom}(\theta)$. Was ist die log-Likelihood-Funktion?

√ (a) $n \cdot \log(\theta) + (x_1 + \ldots + x_n - n) \cdot \log(1-\theta)$

Richtig!

(b) $(x_1 + \ldots + x_n - n) \cdot \log(1-\theta)$

Leider nicht.

(c) $(x_1 + \ldots + x_n) \cdot \log(1-\theta)$

Leider nicht.

(d) $n \cdot \log(\theta) + (x_1 + \ldots + x_n) \cdot \log(1-\theta)$

Leider nicht.

In der vorherigen Frage haben wir gezeigt, dass die Likelihood-Funktion gegeben ist durch

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \theta^n \cdot (1-\theta)^{x_1 + \ldots + x_n - n}.$$

Somit ist die log-Likelihood-Funktion für $x_1, \ldots, x_n \in \{1, 2, \ldots\}$ gegeben durch

$$n \cdot \log(\theta) + (x_1 + \ldots + x_n - n) \cdot \log(1-\theta).$$

3. Weiterhin sei $\Theta = [0,1]$ und $X_1, \ldots, X_n$ seien unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Geom}(\theta)$. Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für θ?

(a) $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$

Leider nicht.

√ (b) $\frac{n}{X_1+\ldots+X_n}$

Richtig!

(c) $\frac{X_1+\ldots+X_n+n}{n}$

Leider nicht.

(d) $\frac{n}{X_1+\ldots+X_n+n}$

Leider nicht.

In der vorherigen Frage haben wir gezeigt, dass die log-Likelihood-Funktion gegeben ist durch

$$n \cdot \log(\theta) + (x_1 + \ldots + x_n - n) \cdot \log(1-\theta).$$

Wir setzen nun die Ableitung der log-Likelihood-Funktion nach θ gleich 0 und erhalten

$$\frac{n}{\theta} - \frac{x_1 + \ldots + x_n - n}{1-\theta} = 0 \iff n - n\theta = (x_1 + \ldots x_n) \cdot \theta - n\theta \iff \theta = \frac{n}{x_1 + \ldots + x_n}$$

und somit

$$T_{ML} = \frac{n}{X_1 + \ldots + X_n}.$$

4. Sei $\Theta = (0, \infty)$. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_1 \sim \text{Exp}(\theta)$. Was ist die Likelihood-Funktion $L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$?

(a) $e^{-\theta(x_1 + \ldots + x_n)}$

Leider nicht.

(b) $\theta \cdot e^{-\theta(x_1 + \ldots + x_n)}$

Leider nicht.

√ (c) $\theta^n \cdot e^{-\theta(x_1 + \ldots + x_n)}$

Richtig!

(d) $n\theta^n \cdot e^{-\theta(x_1 + \ldots + x_n)}$

Leider nicht.

Eine $\text{Exp}(\theta)$-verteilte Zufallsvariable X (unter $\mathbb{P}_\theta$) hat Dichte $f_X(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{x \geq 0}$. Da die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, haben die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ eine gemeinsame Dichte und wir erhalten die Likelihood-Funktion

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = f_{(X_1, \ldots, X_n)}(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} \mathbb{1}_{x_i \geq 0} = \theta^n e^{-\theta(x_1 + \ldots + x_n)} \mathbb{1}_{x_1, \ldots, x_n \geq 0}.$$

5. Weiterhin sei $\Theta = (0, \infty)$ und $X_1, \ldots, X_n$ seien unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Exp}(\theta)$. Was ist die log-Likelihood-Funktion für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$?

(a) $-\theta(x_1 + \ldots + x_n)$

Leider nicht.

(b) $\log(\theta) - \theta(x_1 + \ldots + x_n)$

Leider nicht.

(c) $\log(n) + n \cdot \log(\theta) - \theta(x_1 + \ldots + x_n)$

Leider nicht.

√ (d) $n \cdot \log(\theta) - \theta(x_1 + \ldots + x_n)$

Richtig!

In der vorherigen Frage haben wir gezeigt, dass die Likelihood-Funktion gegeben ist durch

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \theta^n e^{-\theta(x_1 + \ldots + x_n)}.$$

Somit ist die log-Likelihood-Funktion für $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ gegeben durch

$$n \cdot \log(\theta) - \theta(x_1 + \ldots + x_n).$$

6. Weiterhin sei $\Theta = (0, \infty)$ und $X_1, \ldots, X_n$ seien unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt mit $X_1 \sim \text{Exp}(\theta)$. Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für θ?

√ (a) $\frac{n}{X_1+\ldots+X_n}$

Richtig!

(b) $X_1 + \ldots + X_n$

Leider nicht.

(c) $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$

Leider nicht.

(d) $\frac{1}{X_1+\ldots+X_n}$

Leider nicht.

In der vorherigen Frage haben wir gezeigt, dass die log-Likelihood-Funktion gegeben ist durch

$$n \cdot \log(\theta) - \theta(x_1 + \ldots + x_n).$$

Wir setzen nun die Ableitung der log-Likelihood-Funktion nach θ gleich 0 und erhalten

$$\frac{n}{\theta} - (x_1 + \ldots + x_n) = 0 \iff \theta = \frac{n}{x_1 + \ldots + x_n}$$

und somit

$$T_{ML} = \frac{n}{X_1 + \ldots + X_n}.$$