Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 11

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (16.05.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (17.05.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Konfidenzintervallen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $X \sim \chi^2_n$. Was ist der Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$?

(a) 1

Leider nicht.

(b) 2

Leider nicht.

(c) $n/2$

Leider nicht.

√ (d) n

Richtig!

(e) n^2

Leider nicht.

X hat die gleiche Verteilung wie $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$, wobei $Z_1, \ldots, Z_n$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}(0,1)$ sind. Aus Linearität haben wir

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Z_1^2] + \cdots + \mathbb{E}[Z_n^2] = n\mathbb{E}[Z_1^2] = n.$$

2. Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \chi_1^2$, $c > 0$. Sei $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c} e^{-x^2/2} dx$. Was ist $\mathbb{P}[-c \leq X \leq c]$? *(Mehrere richtige Antworten möglich.)*

(a) $\Phi(c)$

Leider nicht.

(b) $1 - \Phi(c)$

Leider nicht.

√ (c) $2\Phi(c) - 1$

Richtig!

√ (d) $\mathbb{P}[Y \leq c]$

Richtig! $\mathbb{P}[-c \leq X \leq c] = \mathbb{P}[X^2 \leq c] = \mathbb{P}[Y \leq c]$.

3. Wir betrachten eine Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, und $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen. Sei $\alpha \in [0,1]$. Ein Konfidenzintervall für θ mit Niveau $1-\alpha$ ist:
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) ein Zufallsintervall $I = [A, B]$, sodass gilt

$$\forall\theta \in \Theta \qquad \mathbb{P}_\theta[A \leq \theta \leq B] \geq \alpha, \tag{1}$$

wobei A, B Zufallsvariablen der Form $A = a(X_1, \ldots, X_n)$, $B = b(X_1, \ldots, X_n)$ mittels $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind.

Leider nicht...

(b) ein Zufallsintervall $I = [T - \frac{1.96}{\sqrt{n}}, T + \frac{1.96}{\sqrt{n}}]$, wobei T ein erwartungstreu Schätzer für θ ist.

Leider nicht...

$\surd$ (c) ein Zufallsintervall $I = [A, B]$, sodass gilt

$$\forall\theta \in \Theta \qquad \mathbb{P}_\theta[\theta \in [A, B]] \geq 1-\alpha, \tag{2}$$

wobei A, B Zufallsvariablen der Form $A = a(X_1, \ldots, X_n)$, $B = b(X_1, \ldots, X_n)$ mittels $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind.

Richtig!

(d) ein Intervall $I = [a, b]$, sodass gilt

$$\forall\theta \in \Theta \quad \mathbb{P}_\theta[a \leq T \leq b] \geq 1-\alpha. \tag{3}$$

wobei T ein erwartungstreu Schätzer für θ ist

$\surd$ (e) ein Zufallsintervall $I = [A, B]$, sodass gilt

$$\forall\theta \in \Theta \qquad \mathbb{P}_\theta[A \leq \theta \leq B] \geq 1-\alpha, \tag{4}$$

wobei A, B Zufallsvariablen der Form $A = a(X_1, \ldots, X_n)$, $B = b(X_1, \ldots, X_n)$ mittels $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind.

Richtig!

4. Sei $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}(0,1)$.
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

√ (a) $X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi_n^2$

Richtig!

(b) $(X_1 + \cdots + X_n)^2 \sim \chi_n^2$

Leider nicht.

√ (c) $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)^2 \sim \chi_1^2$

Richtig! Die Zufallsvariable $Z = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$ ist normalverteilt mit Parameter $m = 0$ und $\sigma^2 = 1$. Es folgt, dass $Z^2 \sim \chi_1^2$.

√ (d) $X_1^2 + X_2^2 \sim \mathrm{Exp}(1/2)$

Richtig! Weil $\chi_2^2 = \mathrm{Exp}(1/2)$.

5. Sei $X_0, \ldots, X_n$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}(0,1)$.
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

√ (a) $\frac{X_0}{\sqrt{\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n}}} \sim t_n$

Richtig! Es folgt von Satz 2.4 und Satz 2.6

(b) $\frac{X_0}{\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}} \sim t_n$

Leider nicht.

(c) $\frac{X_0^2}{\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}} \sim t_n$

Leider nicht.

√ (d) $\frac{X_0+X_1}{\sqrt{\frac{2X_2^2+\cdots+2X_n^2}{n-1}}} \sim t_{n-1}$

Richtig! Sei $Y = \frac{X_0+X_1}{\sqrt{2}}$ und $Z = X_2^2 + \cdots X_n^2$. Wir haben $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Z \sim \chi_{n-1}^2$, und Y, Z sind unabhangig. Es folgt, dass

$$\frac{Y}{\sqrt{Z/n-1}} \sim t_{n-1}.$$

6. Sei $\Theta = \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$. Sei $T = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Welche der folgenden Intervalle sind Konfidenzintervalle für θ mit Niveau 95%?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $I = [-5, 5]$

Leider nicht.

√ (b) $J = [T - \frac{1.96}{\sqrt{n}}, T + \frac{1.96}{\sqrt{n}}]$

Richtig!

√ (c) $K = [T - 1.96, T + 1.96]$

Richtig! Da $K \supset J$ fast sicher, haben wir $\mathbb{P}[\theta \in K] \geq \mathbb{P}[\theta \in J] \geq 0.95$.

√ (d) $L = [T - 5, T + 5]$

Richtig! Es folgt von $L \subset J$ fast sicher.