Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 13

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (30.05.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (31.05.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Likelihood-Quotient-Test und dem P-Wert.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, $\Theta_A = \{\theta_A\}$ und $c \geq 0$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$ und unter $\mathbb{P}_{\theta_A}$. Was ist der Likelihood-Quotient-Test mit Parameter c?

(a) Es ist der Test (T, K) mit Teststatistik

$$T = \frac{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)}{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_A)}$$

und Verwerfungsbereich $K = (c, \infty]$.

Leider nicht.

√ (b) Es ist der Test (T, K) mit Teststatistik

$$T = \frac{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_A)}{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)}$$

und Verwerfungsbereich $K = (c, \infty]$.

Richtig!

(c) Es ist der Test (T, K) mit Teststatistik

$$T = \frac{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)}{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_A)}$$

und Verwerfungsbereich $K = [-\infty, c)$.

Leider nicht.

(d) Es ist der Test (T, K) mit Teststatistik

$$T = \frac{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_A)}{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)}$$

und Verwerfungsbereich $K = [-\infty, c)$.

Leider nicht.

Dies ergibt sich aus den Definitionen 3.5 und 3.6.

2. Sei $\Theta = \mathbb{R}$ und seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. mit $X_1 \sim \mathcal{U}([\theta, \theta+2])$ unter $\mathbb{P}_\theta$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1$. Was ist der Likelihood-Quotient?

(a)

$$R(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{1}_{x_1,\dots,x_n \in [1,2]}$$

Leider nicht.

(b)

$$R(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{1}_{x_1,\dots,x_n \in [0,3]}$$

Leider nicht.

√ (c)

$$R(x_1, \dots, x_n) = \frac{\mathbb{1}_{x_1,\dots,x_n \in [1,3]}}{\mathbb{1}_{x_1,\dots,x_n \in [0,2]}}$$

Richtig!

(d)

$$R(x_1, \dots, x_n) = \frac{\mathbb{1}_{x_1,\dots,x_n \in [0,2]}}{\mathbb{1}_{x_1,\dots,x_n \in [1,3]}}$$

Leider nicht.

Da $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. haben die Zufallsvariablen die gemeinsame Dichte $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i \in [\theta, \theta+2]}$. Die Antwort ergibt sich nun aus Definition 1.4 der Likelihood-Funktion und aus Definition 3.5 des Likelihood-Quotienten.

3. Sei $\Theta = \mathbb{R}$ und seien $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. mit $X_1 \sim \mathcal{U}([\theta, \theta+2])$ unter $\mathbb{P}_\theta$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1$. Wir betrachten den Likelihood-Quotienten-Test mit Parameter $c \geq 0$. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

√ (a) Für die Teststatistik gilt $T \in \{0, 1, \infty\}$.

Richtig! Aus der vorherigen Aufgabe kennen wir den Likelihood-Quotienten $R(x_1, \dots, x_n) = \frac{\mathbb{1}_{x_1,\dots,x_n \in [1,3]}}{\mathbb{1}_{x_1,\dots,x_n \in [0,2]}}$. Dieser hat für alle $x_1, \dots, x_n$ die Form 0/1, 1/0, 1/1 oder 0/0. Er nimmt also nach Konvention Werte in $\{0, 1, \infty\}$ an. Da $T = R(X_1, \dots, X_n)$ folgt die Aussage.

(b) Für die Teststatistik gilt $T \in [0, 1]$.

Leider nicht.

√ (c) Für die Teststatistik gilt $T \geq 0$.

Richtig! Dies gilt immer, da der Likelihood-Quotient nur positive Werte annimmt.

4. Sei $\Theta = \mathbb{R}$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $X_1 \sim \mathcal{U}([\theta, \theta + 2])$ unter $\mathbb{P}_\theta$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1$. Wir betrachten den Likelihood-Quotienten-Test mit Parameter $c \geq 0$. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

√ (a) Für $c = 0$ hat der Test exakt Signifikanzniveau $\alpha^* = (\frac{1}{2})^n$.

Richtig! Wir berechnen $\mathbb{P}_0[T > 0] = 1 - \mathbb{P}_0[T = 0] = 1 - \mathbb{P}_0[\exists i : X_i \in [0, 1)] = \mathbb{P}_0[\forall i : X_i \in [1, 2]] = (1/2)^n$.

(b) Für $c = 0$ hat der Test exakt Signifikanzniveau $\alpha^* = 1$.

Leider nicht.

(c) Für $c = 2$ hat der Test exakt Signifikanzniveau $\alpha^* = (\frac{1}{2})^n$.

Leider nicht.

√ (d) Für $c = 2$ hat der Test exakt Signifikanzniveau $\alpha^* = 0$.

Richtig! Aus der vorherigen Aufgabe wissen wir, dass $T \in \{0, 1, \infty\}$. Wir berechnen $\mathbb{P}_0[T > 2] = \mathbb{P}_0[T = \infty] = \mathbb{P}_0[\exists i : X_i \notin [0, 2]] = 0$.

5. Sei $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ und $\Theta_A = \{\theta_A\}$. Angenommen der Likelihood-Quotient ist wohldefiniert. Unter welchen Bedingungen gilt die folgende Aussage?
“Für jedes $\alpha \in (0, 1)$ existiert immer ein Likelihood-Quotient-Test mit Signifikanzniveau exakt α, also $\mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K] = \alpha$.”

(a) Die Ausage gilt, falls $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. diskrete Zufallsvariablen (unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$) sind.

Leider nicht.

√ (b) Die Ausage gilt, falls die Zufallsvariable $R(X_1, \ldots, X_n)$ stetig (unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$) ist.

Richtig!

(c) Die Aussage gilt immer.

Leider nicht.

(d) Die Aussage gilt nie.

Leider nicht.

Sei $T = R(X_1, \ldots, X_n)$. Die Frage kann wie folgt umformuliert werden: Gibt es für jedes $\alpha \in (0, 1)$ ein c, sodass

$$\mathbb{P}_{\theta_0}[T > c] = \alpha?$$

Falls T stetig ist, ist die Funktion $G : c \mapsto P_{\theta_0}[T > c]$ stetig mit $\lim_{c \to -\infty} G = 1$ und $\lim_{c \to \infty} G = 0$ (denn $G = 1 - F_T$). Also existiert $c \in (0, 1)$ sodass $G(c) = \alpha$.

Falls $X_1, \ldots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen sind, kann man überprüfen, dass T auch diskret ist. Also hat die Verteilungsfunktion von T Sprungstellen und somit gilt die Aussage nicht.

6. Seien $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, $\Theta_A = \{\theta_A\}$. Wir betrachten den Likelihood-Quotient-Test (T, K) mit Parameter $c \geq 0$. Sei $\alpha^* = \mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K]$ und sei (T', K') ein anderer Test mit Signifikanzniveau $\alpha \leq \alpha^*$. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Die Macht von (T', K') ist immer grösser als die Macht von (T, K).

Leider nicht.

√ (b) Der Macht von (T', K') ist immer kleiner als die Macht von (T, K).

Richtig!

(c) $\mathbb{P}_{\theta_A}[T \in K] \leq \mathbb{P}_{\theta_A}[T' \in K']$

Leider nicht.

√ (d) $\mathbb{P}_{\theta_A}[T \in K] \geq \mathbb{P}_{\theta_A}[T' \in K']$

Richtig!

Dies folgt aus dem Neyman-Pearson Lemma.