Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 2

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (07.03.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (08.03.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, bedingten Wahrscheinlichkeiten und dem Konzept der Unabhängigkeit.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien A, B in $\mathcal{F}$. Wir nehmen an, dass A eine echte Teilmenge von B ist, d.h. $A \subset B$ und $A \neq B$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

√ (a) $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

Richtig! Dies ist die Monotonizität des Wahrscheinlichkeitsmasses $\mathbb{P}$.

(b) $\mathbb{P}[A] < \mathbb{P}[B]$

Dies ist im Allgemeinen leider falsch. Beispiel: Wir betrachten eine gezinkte Münze, die immer auf "Kopf" (K) und nie auf "Zahl" (Z) fällt. Dieses Zufallsexperiment können wir mit dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ beschreiben, wobei $\Omega = \{K, Z\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}[\{K\}] = 1$ und $\mathbb{P}[\{Z\}] = 0$. Für die Ereignisse $A = \{K\}$ ("Die Münze zeigt Kopf.") und $B = \{K, Z\}$ ("Die Münze zeigt Kopf oder Zahl.") gilt $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 1$, obwohl A eine echte Teilmenge von B ist.

(c) $\mathbb{P}[A] \geq \mathbb{P}[B]$

Leider nicht. Die Ungleichung geht in die andere Richtung.

(d) $\mathbb{P}[A] > \mathbb{P}[B]$

Leider nicht.

2. Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra und $(A_n)_{n\geq 1}$ Elemente von $\mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

$\surd$ (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

Richtig! Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Definition einer σ-Algebra (siehe Proposition 1.6).

$\surd$ (b) $A_1 \cup A_2 \cup A_4 \in \mathcal{F}$

Richtig! Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Definition einer σ-Algebra (siehe Proposition 1.6).

$\surd$ (c) $(A_2)^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$

Richtig! Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Definition einer σ-Algebra (siehe Proposition 1.6).

$\surd$ (d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Richtig! Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Definition einer σ-Algebra (siehe Proposition 1.6).

3. Sei $\Omega = [0,1]$ und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, sodass $[a,b] \in \mathcal{F}$ für alle $0 \leq a \leq b \leq 1$ gilt (also auch $\{a\} \in \mathcal{F}$). Welche der folgenden Mengen sind Elemente von $\mathcal{F}$?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

$\surd$ (a) $\emptyset$

Richtig! Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Definition einer σ-Algebra (siehe Proposition 1.6).

$\surd$ (b) $(\frac{1}{2}, 1]$

Richtig! Da $[0, \frac{1}{2}] \in \mathcal{F}$, gilt auch $(\frac{1}{2}, 1] = [0, \frac{1}{2}]^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$ (siehe Proposition 1.6).

$\surd$ (c) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

Richtig! Da $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \in \mathcal{F}$, $\{\frac{1}{2}\} \in \mathcal{F}$ und $\{\frac{3}{4}\} \in \mathcal{F}$, gilt auch $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \cap \{\frac{1}{2}\}^{\mathsf{c}} \cap \{\frac{3}{4}\}^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$ (siehe Proposition 1.6).

$\surd$ (d) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

Richtig! Da $\{\frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}$ für alle $n \geq 1$ gilt, ist auch die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\}$ ein Element von $\mathcal{F}$.(siehe Definition 1.1).

4. Wir betrachten zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$. Wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A|B]$ definiert?

(a) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A \cap B]$

Leider nicht.

√ (b) $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$

Richtig!

(c) $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]}$

Leider nicht.

(d) $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A \cup B]}$

Leider nicht.

Dies ist Definition 1.13.

5. Unter welchen Annahmen gilt die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\forall A \in F, \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]\,?$$

(a) Die Formel gilt für alle Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$.

Leider nicht.

(b) Die Formel gilt, wenn die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt sind, d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Leider nicht.

(c) Die Formel gilt, wenn die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ die Bedingung $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ erfüllen.

Leider nicht.

√ (d) Die Formel gilt, wenn die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt sind, d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, und die Bedingung $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ erfüllen.

Richtig!

Dies ist Proposition 1.16.

6. Wir betrachten zwei unabhängige Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

$\checkmark$ (a) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$

Richtig!

$\checkmark$ (b) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$

Richtig!

$\checkmark$ (c) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

Richtig!

Dies ist Proposition 1.20.

7. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) A ist unabhängig von sich selbst ist genau dann, wenn $\mathbb{P}[A] = 0$.

Leider nicht.

(b) A ist unabhängig von sich selbst ist genau dann, wenn $\mathbb{P}[A] = 1$.

Leider nicht.

$\checkmark$ (c) A ist unabhängig von sich selbst ist genau dann, wenn $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$.

Richtig!

(d) A kann nicht unabhängig von sich selbst sein.

Leider nicht.

Nach Definition ist A unabhängig von sich selbst genau dann, wenn

$$P[A \cap A] = P[A] \cdot P[A],$$

also genau für $P[A] = (P[A])^2$ wegen $A \cap A = A$. Wegen $P[A] \geq 0$ ist die letzte Bedingung aber äquivalent zu $P[A] \in \{0, 1\}$

8. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$ drei paarweise unabhängige Ereignisse, d.h. $\mathbb{P}[A_i \cap A_j] = \mathbb{P}[A_i] \cdot \mathbb{P}[A_j]$ für $1 \leq i \neq j \leq 3$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) Die Ereignisse A_1, A_2, A_3 sind zwangsläufig unabhängig.

Leider nicht.

√ (b) Die Ereignisse A_1, A_2, A_3 sind nicht zwangsläufig unabhängig.

Richtig!

Per Definition sind die Ereignisse A_1, A_2, A_3 sind unabhängig, wenn zusätzlich zur paarweisen Unabhängigkeit auch

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \mathbb{P}[A_1] \cdot \mathbb{P}[A_2] \cdot \mathbb{P}[A_3] \tag{1}$$

gilt. Diese Gleichung folgt nicht aus der paarweisen Unabhängigkeit, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt:
Wir betrachten den Wurf dreier fairer Münzen. Sei $\Omega = \{K, Z\}^3$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}[\omega] = 1/8$ für alle $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{K, Z\}^3$. Nun betrachten wir die Ereignisse $A_1 := \{\omega_2 = \omega_3\}$, $A_2 := \{\omega_1 = \omega_3\}$ und $A_3 := \{\omega_1 = \omega_2\}$. Es gilt

$$\mathbb{P}[A_1] = \mathbb{P}[A_2] = \mathbb{P}[A_3] = 1/2$$

und

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_2 \cap A_3] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_3] = 1/4,$$

woraus folgt, dass die Ereignisse paarweise unabhängig sind. Gleichzeitig sehen wir, dass

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = 1/4 \neq 1/8 = \mathbb{P}[A_1] \cdot \mathbb{P}[A_2] \cdot \mathbb{P}[A_3],$$

womit Gleichung 1 nicht erfüllt ist.
Intuitiv kann man dies wie folgt verstehen: Die Information, dass die erste und die zweite Münze auf die gleiche Seite gefallen sind (A_3) liefert keine Information darüber, ob die zweite und die dritte Münze auf die gleiche Seite grfallen sind (A_1). Wenn man aber weiss, dass die erste und die zweite Münze auf die gleiche Seite gefallen sind (A_3) **und** dass die erste und die dritte Münze auf die gleiche Seite gefallen sind (A_2), so folgt hieraus die Information, dass die zweite und die dritte Münze auf die gleiche Seite gefallen sind (A_1). Die drei Ereinisse A_1, A_2 und A_3 sind also nicht unabhängig.

9. Bei einem Zufallsexperiment werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und das Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}$ definiert durch

$$\mathbb{P}[(\omega_1, \omega_2)] = 1/36, \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

Als Zufallsvariablen betrachten wir

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{"Augenzahl des ersten Würfels"}$$

$$Y : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_2 \end{cases} \qquad \text{"Augenzahl des zweiten Würfels"}$$

$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{"Augensumme der beiden Würfel"}$$

Welche Werte kann S annehmen (mit positiver Wahrscheinlichkeit)?

(a) S nimmt Werte in $\{1, \dots, 12\}$ an.

Leider nicht. Der Wert 1 wird nicht mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen, da das kleinstmögliche Ergebnis $1 + 1 = 2$ ist.

√ (b) S nimmt Werte in $\{2, \dots, 12\}$ an.

Richtig!

(c) S nimmt Werte in $\{1, \dots, 6\}^2$ an.

Leider nicht. S ist eine Zahl, kein Tupel.

10. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{P}[S = 9|Y = 3]$?

(a) 0

(b) 1/36

√ (c) 1/6

(d) 1/4

Per Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir $\mathbb{P}[S = 9|Y = 3] = \mathbb{P}[\{S = 9\} \cap \{Y = 3\}]/\mathbb{P}[Y = 3]$. Weiterhin gilt $\{S = 9\} \cap \{Y = 3\} = \{X = 6\} \cap \{Y = 3\}$, denn wenn der zweite Würfel die Augenzahl 3 zeigt, so kann die Summe der Augensumme der beiden Würfel nur dann 9 sein, wenn der erste Würfel die Augenzahl 6 zeigt. Wir erhalten also

$$\mathbb{P}[S = 9|Y = 3] = \mathbb{P}[\{X = 6\} \cap \{Y = 3\}]/\mathbb{P}[Y = 3] = (1/36)/(1/6) = 1/6.$$

11. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{P}[S = 9]$?

(a) 1/12

√ (b) 1/9

(c) 1/6

(d) 1/4

Wir verwenden die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit (siehe Proposition 1.16) und erhalten

$$\mathbb{P}[S = 9] = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}[S = 9|Y = i] \cdot \mathbb{P}[Y = i] = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}[S = 9|Y = i] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Hierbei haben wir verwendet, $\mathbb{P}[S = 9|Y = i] = 0$ für $i = 1, 2$ und $\mathbb{P}[S = 9|Y = i] = 1/6$ für $i = 3, 4, 5, 6$.

12. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{P}[Y = 3|S = 9]$?

(a) 0

(b) 1/36

(c) 1/6

√ (d) 1/4

Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\mathbb{P}[Y = 3|S = 9] = \frac{\mathbb{P}[\{Y = 3\} \cap \{S = 9\}]}{\mathbb{P}[S = 9]} = \mathbb{P}[S = 9|Y = 3] \cdot \frac{\mathbb{P}[Y = 3]}{\mathbb{P}[S = 9]} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}.$$

13. Sei X eine beliebige Zufallsvariable, die n verschiedene Werte $x_1,\dots,x_n$ annehmen kann. Was ist $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X = x_i]$?

(a) 0

Leider nicht!

√ (b) 1

Richtig!

(c) ∞

Leider nicht.

(d) 0.5

Leider nicht.

(e) -1

Leider nicht! Eine Wahrscheinlichkeit ist immer grösser oder gleich null; also ist auch die Summe von Wahrscheinlichkeiten grösser oder gleich null. Die Antwort scheidet daher aus.

(f) Kann man ohne weitere Angaben nicht lösen!

Leider nicht.

Für jede Zufallsvariable X gilt $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X = x_i] = 1$. Aus der Additivität [E4] und aus [E1] des Wahrscheinlichkeitsmasses erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X = x_i] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} \{X = x_i\}\right] = \mathbb{P}[\Omega] = 1.$$