Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 3

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (14.03.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (15.03.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Verteilungsfunktionen, verallgemeinerten Inversen und mit der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfuntion F_X. Was gilt für $a < b$?

(a) $\mathbb{P}[a < X < b] = F_X(b) - F_X(a)$

Leider nicht.

(b) $\mathbb{P}[a \leq X < b] = F_X(b) - F_X(a)$

Leider nicht.

√ (c) $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

Richtig!

(d) $\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

Leider nicht.

Gemäss Definition der Verteilungsfunktion gilt $F_X(b) = \mathbb{P}[X \leq b]$. Hieraus folgt

$$F_X(b) - F_X(a) = \underbrace{\mathbb{P}[X \leq b]}_{=\mathbb{P}[X \leq a] + \mathbb{P}[a < X \leq b]} - \mathbb{P}[X \leq a] = \mathbb{P}[a < X \leq b],$$

wobei wir $\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \sqcup \{a < X \leq b\}$ und [E4] des Wahrscheinlichkeitsmasses verwendet haben.

2. Sei F eine Verteilungsfunktion. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

$\surd$ (a) F ist monoton wachsend.

Richtig! (siehe Theorem 2.4)

(b) F ist monoton fallend.

Leider nicht. Gegenbeispiel: Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen, die immer den Wert 1 annimmt, erfüllt $F(a) = 0$ für alle $a < 1$ und $F(a) = 1$ für alle $a \geq 1$.

(c) $\lim_{a\to\infty} F(a) = \infty$

Leider nicht. Der Grenzwert ist 1 (siehe Theorem 2.4)

(d) $\lim_{a\to 0} F(a) = 0$

Leider nicht. Gegenbeispiel: Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen, die immer den Wert -5 annimmt, erfüllt $F(a) = 0$ für alle $a < -5$ und $F(a) = 1$ für alle $a \geq -5$. Insbesondere gilt $F(0) = 1$.

3. Sei F eine Verteilungsfunktion. Welche Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) F ist stetig.

Leider nicht. Dies stimmt nur für manche Zufallsvariablen. Gegenbeispiel: Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen, die immer den Wert 1 annimmt, erfüllt $F(a) = 0$ für alle $a < 1$ und $F(a) = 1$ für alle $a \geq 1$, und ist somit an der Stelle $a = 1$ nicht stetig.

$\surd$ (b) F ist rechtsseitig stetig.

Richtig! (siehe Theorem 2.4)

(c) F ist nicht linksseitig stetig.

Leider nicht. Dies stimmt nur für manche Zufallsvariablen. Gegenbeispiel: Die Verteilungsfunktion einer gleichverteilten Zufallsvariable in $[0, 1]$ ist stetig und somit auch linksseitig stetig (siehe Definition 2.9).

4. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[X=-1]=1/4$, $\mathbb{P}[X=0]=1/4$ und $\mathbb{P}[X=1]=1/2$. Was ist die Verteilungsfunktion F_X?

√ (a)

$$F_X(a)=\begin{cases}0 & \text{für } x<-1,\\ 1/4 & \text{für } -1\leq x<0,\\ 1/2 & \text{für } 0\leq x<1,\\ 1 & \text{für } x\geq 1.\end{cases}$$

Richtig!

(b)

$$F_X(a)=\begin{cases}1/4 & \text{für } x=-1,\\ 1/4 & \text{für } x=0,\\ 1/2 & \text{für } x=1,\\ 0 & \text{für } x\notin\{-1,0,1\}.\end{cases}$$

Leider nicht.

(c)

$$F_X(a)=\begin{cases}0 & \text{für } x<-1,\\ (x+1)/2 & \text{für } -1\leq x<1,\\ 1 & \text{für } x\geq 1.\end{cases}$$

Leider nicht.

Wir erhalten die Verteilungsfuntion, indem wir zunächst festellen, dass $\mathbb{P}[X\leq b]=0$ für $b<-1$ gilt. Weiterhin gilt $\mathbb{P}[X\leq b]=\mathbb{P}[X=-1]=1/4$ für $b\in[-1,0)$, $\mathbb{P}[X\leq b]=\mathbb{P}[X=-1]+\mathbb{P}[X=0]=1/2$ für $b\in[0,1)$ und $\mathbb{P}[X\leq b]=\mathbb{P}[X=-1]+\mathbb{P}[X=0]+\mathbb{P}[X=1]=1$ für $b\in[1,\infty)$

5. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X:

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0, \\ a/2 & \text{für } 0 \leq a < 2, \\ 1 & \text{für } a \geq 2. \end{cases}$$

Welche Aussagen über die Zufallsvariable X sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathbb{P}[X \geq 2] = 1$

Leider nicht.

√ (b) $\mathbb{P}[X = 1] = 0$

Richtig!

√ (c) $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 1] = 1/2$

Richtig!

(d) $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 1] = 1$

Leider nicht.

√ (e) $\mathbb{P}[X \geq 0] = 1$

Richtig!

√ (f) $\mathbb{P}[X \geq 1] = \mathbb{P}[X \leq 1]$

Richtig!

6. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < -5, \\ \frac{a+5}{10} & \text{für } -5 \leq a < 5, \\ 1 & \text{für } a \geq 5. \end{cases}$$

Was ist die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ von F?

(a) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = 10\alpha + 5.$$

Leider nicht.

√ (b) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = 10\alpha - 5.$$

Richtig!

(c) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = 10(\alpha - 5).$$

Leider nicht.

Eingeschränkt auf das Intervall $(-5, 5)$ ist die Funktion $F : (-5, 5) \to (0, 1)$ mit $F(a) = \frac{a+5}{10}$ stetig und strikt monoton wachsend, also invertierbar. Wir erhalten somit $F^{-1}(\alpha) = 10\alpha - 5$.

7. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0, \\ 1/2 & \text{für } 0 \leq a < 1, \\ 3/4 & \text{für } 1 \leq a < 2, \\ 1 & \text{für } 2 \leq a. \end{cases}$$

Was ist die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ von F?

(a)

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \alpha < 1/2, \\ 1 & \text{für } 1/2 \leq \alpha < 3/4, \\ 2 & \text{für } 3/4 \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

Leider nicht. Gegenbeispiel: $F^{-1}(1/2) = \inf\{a \in \mathbb{R} : F(a) \geq 1/2\} = \inf\{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\} = 0$.

(b)

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < \alpha \leq 1/2, \\ 2 & \text{für } 1/2 < \alpha \leq 3/4, \\ \infty & \text{für } 3/4 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Leider nicht. Gegenbeispiel: $F^{-1}(1/2) = \inf\{a \in \mathbb{R} : F(a) \geq 1/2\} = \inf\{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\} = 0$.

√ (c)

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \alpha \leq 1/2, \\ 1 & \text{für } 1/2 < \alpha \leq 3/4, \\ 2 & \text{für } 3/4 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Richtig!

8. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 1, \\ 1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2 & \text{für } a \geq 1. \end{cases}$$

Was ist die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ von F?

√ (a) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}.$$

Richtig!

(b) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Leider nicht.

(c) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = \frac{1}{1-\sqrt{\alpha}}$$

Leider nicht.

Eingeschränkt auf das Intervall $(1,\infty)$ ist die Funktion $F : (1,\infty) \to (0,1)$ mit $F(a) = 1 - (\frac{1}{a})^2$ stetig und strikt monoton wachsend, also invertierbar. Wir erhalten somit $F^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$.

9. Seien X_1, X_2 und X_3 drei Zufallsvariablen. Welche Aussage ist korrekt?

√ (a) X_1, X_2, X_3 sind unabhängig, wenn für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \cdot \mathbb{P}[X_2 \leq x_2] \cdot \mathbb{P}[X_3 \leq x_3].$$

Richtig!

(b) X_1, X_2, X_3 sind unabhängig, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x, X_2 \leq x, X_3 \leq x] = \mathbb{P}[X_1 \leq x] \cdot \mathbb{P}[X_2 \leq x] \cdot \mathbb{P}[X_3 \leq x].$$

Leider nicht.

Dies ist Definition 2.5.

10. Wir betrachten den Wurf von zwei unabhängigen Würfeln. Der Grundraum ist $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ und ein Element $\omega \in \Omega$ ist ein Paar $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, wobei die erste Koordinate die Augenzahl des ersten Würfels repräsentiert und die zweite Koordinate die Augenzahl des zweiten Würfels. Wir definieren die Zufallsvariablen $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$X(\omega) = \omega_1, \quad Y(\omega) = (\omega_2)^2, \quad Z(\omega) = \omega_1 - \omega_2.$$

Welche Aussagen sind korrekt? *(Mehrere richtige Antworten möglich.)*

√ (a) X und Y sind unabhängig.

Richtig!

(b) X und Z sind unabhängig.

Leider nicht.

(c) Y und Z sind unabhängig.

Leider nicht.

Dies lässt sich analog zu Beispiel 1 unterhalb von Definition 2.5 im Skript zeigen.