Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 4

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (21.03.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (22.03.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit diskreten und stetigen Zufallsvariablen, mit dem Zusammenhang zwischen Dichte und Verteilungsfunktion und mit Beispielen wichtiger Verteilungen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Was gilt für eine stetige Zufallsvariable?

√ (a) Die Verteilungsfunktion ist stetig.

(b) Die Dichtefunktion ist stetig.

(c) Weder noch.

Die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable ist stetig. Für die Dichte muss dies nicht gelten. Gegenbeispiel: Die Dichtefunktion einer gleichverteilten Zufallsvariable auf $[0, 1]$ ist an den Stellen 0 und 1 nicht stetig.

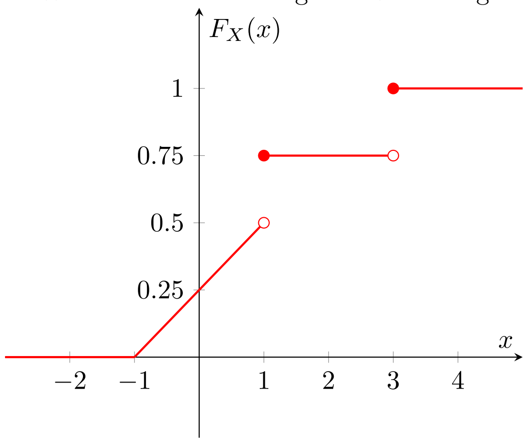
2. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Die kumulative Verteilungsfunktion kann bei stetigen Verteilungen auch einmal (strikt) grösser als 1 sein.

√ (b) Die Dichtefunktion kann bei stetigen Verteilungen auch einmal (strikt) grösser als 1 sein.

Die Verteilungsfunktion ist immer kleiner oder gleich 1. Für die Dichtefunktion muss dies aber nicht gelten (Beispiel: Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, 1/4]$.

3. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion F_X. Welche Aussage ist korrekt?



(a) Die Zufallsvariable X ist stetig.

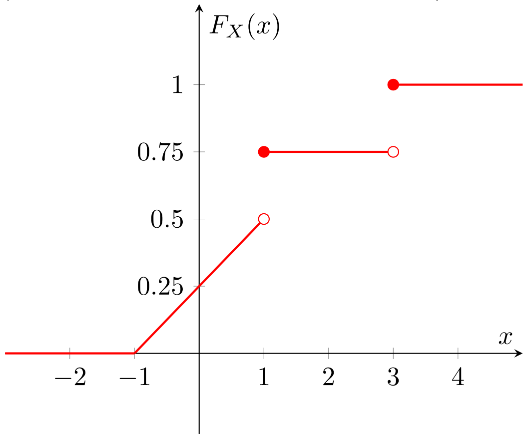
Leider nicht. An den Stellen 1 und 3 ist die Verteilungsfunktion nicht stetig.

(b) Die Zufallsvariable X ist diskret.

Leider nicht. Die Zufallsvariable nimmt Werte in $[-1, 1] \cup \{3\}$ an.

√ (c) Die Zufallsvariable X ist weder stetig noch diskret

4. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion F_X. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)



(a) $\mathbb{P}[X = 0] = 1/4$

Leider nicht. Die Verteilungsfunktion ist an der Stelle $x = 0$ stetig.

√ (b) $\mathbb{P}[X = 3] = 1/4$

Richtig! Die Verteilungsfunktion macht an der Stelle $x = 3$ einen Sprung der Höhe $1/4$.

√ (c) $\mathbb{P}[X = 0] = 0$

Richtig! Die Verteilungsfunktion ist an der Stelle $x = 0$ stetig.

(d) $\mathbb{P}[X = 3] = 0$

Leider nicht. Die Verteilungsfunktion macht an der Stelle $x = 3$ einen Sprung der Höhe $1/4$.

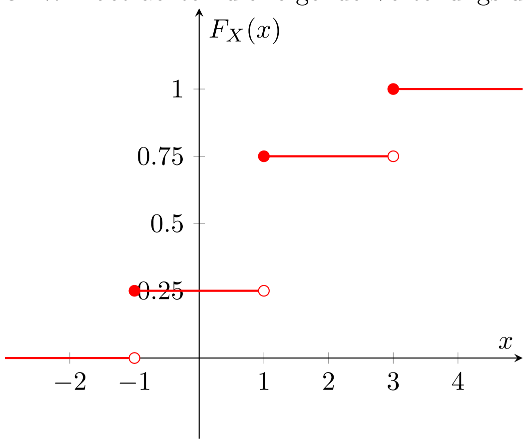
(e) $\mathbb{P}[0 \le X \le 1] = 1/4$

Leider nicht. $\mathbb{P}[0 \le X \le 1] = \mathbb{P}[0 \le X < 1] + \mathbb{P}[X = 1] = 1/4 + 1/4 = 1/2$.

√ (f) $\mathbb{P}[0 \le X \le 1] = 1/2$

Richtig! $\mathbb{P}[0 \le X \le 1] = \mathbb{P}[0 \le X < 1] + \mathbb{P}[X = 1] = 1/4 + 1/4 = 1/2$.

5. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion F_X. Welche Aussage ist korrekt?



(a) Die Zufallsvariable X ist stetig.

Leider nicht. An den Stellen -1, 1 und 3 ist die Verteilungsfunktion nicht stetig.

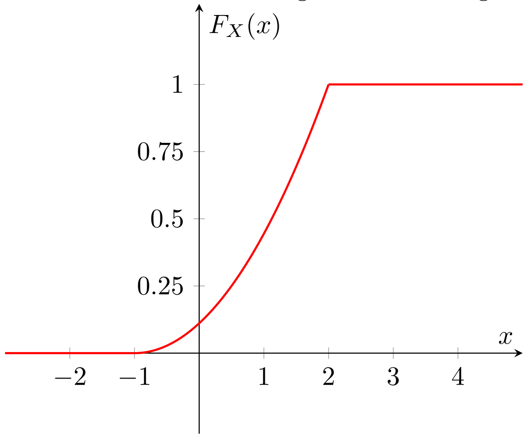
√ (b) Die Zufallsvariable X ist diskret.

Richtig! Die Zufallsvariable nimmt Werte in $\{-1, 1, 3\}$ an.

(c) Die Zufallsvariable X ist weder stetig noch diskret

Leider nicht.

6. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion F_X. Welche Aussage ist korrekt?



√ (a) Die Zufallsvariable X ist stetig.

Richtig! Die Verteilungsfunktion kann als $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ geschrieben werden, wobei $f(x) = 0$ für $x \notin [-1, 2]$ und $f(x) = 2(x + 1)/9$ für $x \in [-1, 2]$.

(b) Die Zufallsvariable X ist diskret.

Leider nicht. Die Zufallsvariable nimmt Werte in $[-1, 2]$ an.

(c) Die Zufallsvariable X ist weder stetig noch diskret

Leider nicht.

7. Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Ist die Zufallsvariable $Y := \sqrt{2} \cdot X$ diskret?

√ (a) Ja.

(b) Nein.

Da X diskret ist, gilt $\mathbb{P}[X \in W] = 1$ für eine endliche oder abzählbare Menge W. Somit gilt $\mathbb{P}[Y \in W'] = 1$, wobei $W' := \{\sqrt{2} \cdot w : e \in W\}$.

8. Sei X eine stetige Zufallsvariable. Ist die Zufallsvariable $Y := 10 \cdot X$ stetig?

√ (a) Ja.

(b) Nein.

Gemäss Definition einer stetigen Zufallsvariable hat X eine Dichte f. Es gilt also $F_Y(a) = \mathbb{P}[Y \leq a] = \mathbb{P}[X \leq a/10] = F_X(a/10) = \int_{-\infty}^{a/10} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 1/10 \cdot f(y/10)dy$. Hieraus folgt, dass Y ebenfalls eine Dichte hat und somit eine stetige Zufallsvariable ist.

9. Sei X eine beliebige Zufallsvariable. Ist $Y := \lfloor X \rfloor$ immer eine diskrete Zufallsvariable? (Zur Erinnerung: Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich x, z.B. $\lfloor \pi \rfloor = 3$.)

$\checkmark$ (a) Ja.

(b) Nein.

Die Zufallsvariable Y nimmt Werte in $\mathbb{Z}$ an und ist somit diskret.

10. Sei X die Anzahl der Einsen, die in 10 unabhängigen Würfen mit einem fairen Würfel geworfen wird. Welche Verteilung kommt für X in Frage?

(a) Bernoulli verteilt mit Parameter $p = 1/6$.

(b) Geometrisch verteilt mit Parameter $p = 1/6$.

$\checkmark$ (c) Binomialverteilt mit Parameter $n = 10$ und $p = 1/6$.

(d) Poisson verteilt mit Parameter $\lambda = 5/3$.

Aus Proposition 3.11 wissen wir, dass hierfür die Binomialverteilung mit Parametern $n = 10$ und $p = 1/6$ in Frage kommt.

11. Eine Firma erhält eine grosse Lieferung von 10 verschiedenen Materialien. Aus Erfahrung wissen wir, dass im Schnitt 5% der Materialien mangelhaft sind. Nehme an, dass die Materialien unabhängig voneinander sind. Dann gilt:

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Materialien mangelhaft sind, ist

$$\binom{10}{2} 0.05^8 (1 - 0.05)^2.$$

$\checkmark$ (b) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Materialien mangelhaft sind, ist

$$\binom{10}{2} 0.05^2 (1 - 0.05)^8.$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Materialien mangelhaft sind, ist

$$\binom{10}{2} 0.05^2 (1 - 0.05)^8.$$

Es handelt sich um eine Summe von 10 unabhängigen, Ber(0.05)-verteilten Zufallsvariablen, also um eine Binomialverteilung mit Parametern $n = 10$ und $p = 0.05$ (siehe Definition 3.9 und Proposition 3.11)

12. Die stetige Zufallsvariable X hat die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Es ist $\mathbb{P}(X=0) = 0.5$

Leider nicht. Die Zufallsvariable ist stetig und somit gilt $\mathbb{P}(X=0)=0$.

√ (b) Für $x \geq 0$ gilt $\mathbb{P}(X > x) = \frac{\exp(-x)}{1+\exp(-x)}$.

Richtig! Es gilt $\mathbb{P}[X > x] = 1 - \mathbb{P}[X \leq x] = 1 - \frac{1}{1+\exp(-x)} = \frac{\exp(-x)}{1+\exp(-x)}$.

(c) Die Dichte von X ist $\frac{-\exp(-x)}{(1+\exp(-x))^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Leider nicht. Die Dichte kann keine negativen Werte annehmen.

13. Sei Z eine $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariable. Wie gross ist $\mathbb{P}(Z=0)$?

(a) $1/2$

Leider nicht. Dies ist der Wert der Verteilungsfunktion an der Stelle 0.

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$

Leider nicht. Dies ist die Dichte an der Stelle 0.

√ (c) 0

Richtig!

14. Betrachte eine kontinuierliche, uniforme Verteilung auf dem Intervall $[0,2]$. Die Dichte dieser Verteilung nennen wir $f(x)$. Wie gross sind die Werte $f(0), f(1), f(2)$?

(a) $f(0) = 0,\ f(1) = 0.5,\ f(2) = 1$

√ (b) $f(0) = 0.5,\ f(1) = 0.5,\ f(2) = 0.5$

(c) $f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(2) = 1$

Die Länge des Intervals ist 2 und somit gilt für die Dichte $f(x) = 0.5$ für $x \in [0,2]$ und $f(x) = 0$ für $x \notin [0,2]$.

15. Es gilt $P[X > t+s \mid X > s] = P[X > t]$ für alle $t, s \geq 0$, falls

(a) $X \sim \mathcal{U}([a,b])$,

(b) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$,

√ (c) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Dies ist Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung.

16. Die Dichte einer Zufallsvariablen X sei gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} c+x & \text{falls } -\frac{c}{2} \leq x \leq 0, \\ c-x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{c}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Konstante c.

√ (a) $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(b) $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $c = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Wir wissen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \lim_{a\to\infty} F_X(a) = 1$ gelten muss. Durch Berechnung des Integrals erhält man die Gleichung $c^2 - (c/2)^2 = 1$ und somit $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.