Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 5

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (28.03.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (29.03.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit der Definition des Erwartungswerts diskreter und stetiger Zufallsvariabeln und mit wichtigen Beispielen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei X ist eine diskrete Zufallsvariable und Y ist eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_Y.Welche der folgenden unten aufgelisteten Kombinationen können niemals auftreten?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathbb{P}(X = 3) = 0.3$; $f_Y(0.6) = 1.5$

Leider nicht. Diese Kombination ist möglich.

√ (b) $\mathbb{P}(X = 3) = 1.3$; $f_Y(0.6) = 0.5$

Richtig! Diese Kombination ist nicht möglich.

(c) $\mathbb{P}(X = 3) = 0.3$; $f_Y(0.6) = 0.7$

Leider nicht. Diese Kombination ist möglich.

Bei einer diskreten Zufallsvariable X kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nicht grösser als 1 sein. Der Wert einer Dichte kann aber durchaus grösser als 1 werden.

2. Sei $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\mathbb{P}[X > 5] = 1 - \mathbb{P}[X < 5]$

Leider nicht. Da $\mathbb{P}[X = 5] = \frac{\lambda^5}{5!}e^{-\lambda}$, gilt $\mathbb{P}[X > 5] + \mathbb{P}[X < 5] = 1 - \mathbb{P}[X = 5] < 1$.

√ (b) $\mathbb{P}[X \geq 1 | X \leq 1] = \lambda/(\lambda + 1)$

Richtig! Es gilt

$$\mathbb{P}[X \geq 1 | X \leq 1] = \frac{\mathbb{P}[X = 1]}{\mathbb{P}[X = 0] + \mathbb{P}[X = 1]} = \frac{\lambda \cdot e^{-\lambda}}{e^{-\lambda} + \lambda \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

(c) $2X \sim \text{Poisson}[2\lambda]$

Leider nicht. Die Zufallsvariable $2X$ nimmt fast sicher gerade Werte an und kann somit nicht Poisson-verteilt sein.

3. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Unter welchen Bedingungen gilt $\mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$?

(a) Die Linearität des Erwartungswerts gilt für beliebige Zufallsvariablen.

Leider nicht. $\mathrm{E}[X+Y]$, $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{E}[Y]$ müssen wohldefiniert sein.

√ (b) Die Linearität des Erwartungswerts gilt für beliebige Zufallsvariablen, solange $\mathrm{E}[X+Y]$, $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{E}[Y]$ wohldefiniert sind.

Richtig!

(c) Die Linearität des Erwartungswerts gilt nur, wenn X und Y unabhängig sind.

Leider nicht. Es ist nicht notwendig, dass X und Y unabhängig sind.

Dies ist Theorem 4.9.

4. Sei X eine Zufallsvariable, die fast sicher Werte in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ annimmt. Welche der folgenden Ausdrücke sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = k]$

Leider nicht. $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] = 1$, was nicht notwendigerweise dem Erwartungswert entspricht.

√ (b) $\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}[X = k]$

Richtig! Dies ist die Formel für den Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable (siehe Proposition 4.6)

√ (c) $\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k]$

Richtig! Dies ist die Tailsum Formel für Zufallsvariablen, die fast sicher Werte in $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ annehmen (siehe Proposition 4.15).

(d) $\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k]$

Leider nicht. Für die Tailsum Formel ist es wichtig, dass die Summe bei $k = 1$ beginnt. Gegenbeispiel: Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[X = 0] = 1$. Dann gilt $\mathbb{P}[X \geq 0] = 1$ und somit $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k] = 1$, obwohl $\mathrm{E}[X] = 0$.

5. Sei $p \in [0, 1]$ und sei X eine $\mathrm{Ber}(p)$-verteilte Zufallsvariable. Was ist der Erwartungswert $\mathrm{E}[X]$?

(a) 0

(b) $1 - p$

√ (c) p

(d) 1

Man berechnet $\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \mathbb{P}[X = 0] + 1 \cdot \mathbb{P}[X = 1] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$.

6. Sei $p \in [0,1]$, sei X eine Ber(p)-verteilte Zufallsvariable und definiere $Y := X^3$. Was ist der Erwartungswert E[Y]?

(a) $1-p$

(b) $(1-p)^3$

√ (c) p

(d) p^3

Es gilt $X^3 = X$ und somit erhält man $\mathbb{E}[Y] = \mathrm{E}[X^3] = \mathrm{E}[X] = p$.

7. Sei $p \in [0,1]$, sei X eine Ber(p)-verteilte Zufallsvariable und definiere $Z := (2X-1)^2$. Was ist der Erwartungswert E[Z]? *(Scherzfrage)*

√ (a) 1

(b) $2p-1$

(c) $1-2p$

(d) 0

Da X fast sicher Werte in $\{0,1\}$ annimmt, nimmt Z fast sicher Werte in $\{1\}$ an. Somit gilt $\mathbb{E}[Z] = 1 \cdot \mathbb{P}[Z=1] = 1$.

8. Sei $\lambda > 0$ und sei X eine Poisson(λ)-verteilte Zufallsvariable. Was ist der Erwartungswert E[X]?

(a) 1

(b) $1/\lambda$

√ (c) λ

(d) λ^2

Man berechnet $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}) \cdot e^{-\lambda} = \lambda$.

9. Sei $\lambda > 0$, sei X eine Poisson(λ)-verteilte Zufallsvariable und sei $Y := X^2$. Was ist der Erwartungswert E[Y]?

(a) λ

(b) λ^2

(c) $1/\lambda^2$

√ (d) $\lambda(\lambda+1)$

Man berechnet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda} \right) \\ &= \lambda \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) \cdot \frac{\lambda^{\ell}}{(\ell)!} \cdot e^{-\lambda} \right) = \lambda \cdot (\lambda+1)\,.\end{aligned}$$

10. Sei $a > 1$ und sei U eine $\mathcal{U}([a, a^2])$-verteilte Zufallsvariable. Was ist der Erwartungswert E[U]?

√ (a) $\frac{a(a+1)}{2}$

(b) $\frac{a^2}{2}$

(c) $a^2 + a$

(d) a

Es gilt $a^2 > a$ und somit können wir die Berechnung aus Beispiel 1 in Abschnitt 4.3 im Skript verwenden und erhalten mit $b = a^2$ das Resultat $\frac{a+a^2}{2} = \frac{a(a+1)}{2}$.

11. Sei $\lambda > 0$ und sei X eine Exp(λ)-verteilte Zufallsvariable. Was ist der Erwartungswert E[X]?

(a) 1

√ (b) $1/\lambda$

(c) λ

(d) λ^2

Man berechnet durch partielle Ableitung

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \underbrace{\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx}_{=\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}} = \frac{1}{\lambda}.$$

12. Seien $\mu, \lambda > 0$. Seien $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Exp}(\mu)$. Was ist der Erwartungswert von $\text{E}[\lambda X + \mu Y]$?

(a) $\lambda^2 + \mu^2$

(b) $\lambda + \mu$

(c) $1/\lambda + 1/\mu$

√ (d) 2

Wir verwenden die Linearität des Erwartungswerts und erhalten

$$\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y] = \lambda \mathbb{E}[X] + \mu \text{E}[Y] = \lambda \cdot 1/\lambda + \mu \cdot 1/\mu = 1 + 1 = 2.$$

13. Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und Y eine Zufallsvariable, sodass $X+Y \sim \mathcal{N}(1,6)$. Was ist der Erwartungswert $\text{E}[Y]$?

(a) 2

√ (b) 1

(c) 0

(d) -1

Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt $\text{E}[Y] = \text{E}[X+Y] - \text{E}[X] = 1 - 0 = 1$.

14. Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und sei $Y := 2 \cdot X^3$. Was ist der Erwartungswert $\text{E}[Y]$.

(a) 2

(b) 1

√ (c) 0

(d) -1

Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt $\text{E}[Y] = 2 \cdot \text{E}[X^3]$. Man berechnet dann

$$\mathbb{E}[X^3] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot f_{0,1}(x) dx = 0,$$

da $x^3 \cdot f_{0,1}(x)$ eine ungerade Funktion ist.