Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 6

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (04.04.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (05.04.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Rechenregeln für die Varianz, mit Beispielen wichtiger Verteilungen und mit der gemeinsamen Verteilung diskreter Zufallsvariablen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Seien X, Y und Z drei Zufallsvariablen. Unter welchen Bedingungen gilt $\sigma^2_{X+Y+Z} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y + \sigma^2_Z$? *(Mehrere richtige Antworten möglich.)*

(a) Dies gilt für beliebige Zufallsvariablen.

Leider nicht.

√ (b) Dies gilt, wenn X, Y und Z paarweise unabhängig sind.

Richtig!

√ (c) Dies gilt, wenn X, Y und Z unabhängig sind.

Richtig!

Dies ist Teil 2 von Proposition 4.26 und gilt für paarweise unabhängige ZVen. Da Unabhängigkeit auch paarweise Unabhängigkeit impliziert, ist die dritte Antwort ebenfalls richtig.

2. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Welche Aussage ist im Allgemeinen korrekt?

(a) $\sigma^2_X = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]$

Leider nicht.

√ (b) $\sigma^2_X = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Richtig!

(c) $\sigma^2_X = \mathbb{E}[X^2]$

Leider nicht.

Dies ist Teil 1 von Proposition 4.26.

3. Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen. Unter welcher Bedingung ist die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung $p = (p(x,y))_{x \in W_X, y \in W_Y}$ von X und Y eindeutig durch die Gewichtsfunktionen der Randverteilungen p_X und p_Y bestimmt?

√ (a) Falls X und Y unabhängig sind.

Richtig! Dies folgt direkt aus Proposition 5.6.

(b) Falls X und Y identisch verteilt sind (d.h. $p_X = p_Y$).

Leider nicht. Wir betrachten zwei Beispiele.
1. Sei X Ber(1/2)-verteilt und $Y := X$. Dann gilt $p(0,0) = p(1,1) = 1/2$ und $p(1,0) = p(0,1) = 0$ und $p_X(0) = p_X(1) = p_Y(0) = p_Y(1) = 1/2$.
2. Seien X, Y unabhängig und Ber(1/2)-verteilt. Dann gilt $p(0,0) = p(1,1) = p(1,0) = p(0,1) = 1/4$ und $p_X(0) = p_X(1) = p_Y(0) = p_Y(1) = 1/2$.
Die Gewichtsfunktionen/Verteilungen der Randverteilungen sind in beiden Fällen identisch, die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung unterscheidet sich aber.

(c) Falls X und Y Ber(p)-verteilt sind.

Leider nicht. Wir können die gleichen Beispiele als Gegenbeispiel verwenden.
1. Sei X Ber(1/2)-verteilt und $Y := X$. Dann gilt $p(0,0) = p(1,1) = 1/2$ und $p(1,0) = p(0,1) = 0$ und $p_X(0) = p_X(1) = p_Y(0) = p_Y(1) = 1/2$.
2. Seien X, Y unabhängig und Ber(1/2)-verteilt. Dann gilt $p(0,0) = p(1,1) = p(1,0) = p(0,1) = 1/4$ und $p_X(0) = p_X(1) = p_Y(0) = p_Y(1) = 1/2$.
Die Gewichtsfunktionen/Verteilungen der Randverteilungen sind in beiden Fällen identisch, die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung unterscheidet sich aber.

4. Es seien X und Y unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Varianz $\sigma^2 > 0$. Was ist die Varianz der Zufallsvariable $Z := X + X - Y$?

(a) σ^2.

Leider nicht.

(b) $3\sigma^2$.

Leider nicht.

√ (c) $5\sigma^2$.

Richtig!

Für jede Zufallsvariable $\widetilde{X}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sigma^2_{c\widetilde{X}} = \mathbb{E}[(c\widetilde{X} - \mathbb{E}[c\widetilde{X}])^2] = c^2 \cdot \mathbb{E}[(\widetilde{X} - \mathbb{E}[\widetilde{X}])^2] = c^2 \cdot \sigma^2_{\widetilde{X}}.$$

Somit folgt aus der Unabhängigkeit (siehe Proposition 4.26)

$$\sigma^2_Z = \sigma^2_{2X-Y} = \sigma^2_{2X} + \sigma^2_{-Y} = 2^2\sigma^2_X + (-1)^2\sigma^2_Y = 4\sigma^2 + \sigma^2 = 5\sigma^2.$$

5. Sei $p \in [0,1]$, $n \geq 1$ und X eine $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilte Zufallsvariable. Was ist die Varianz σ_X^2?

(a) $p(1-p)$

Leider nicht.

(b) np

Leider nicht.

√ (c) $np(1-p)$

Richtig!

(d) $n^2 p(1-p)$

Leider nicht.

Vergleiche Anwendung unterhalb von Proposition 4.26.

6. Sei $p \in [0,1]$, sei X eine $\mathrm{Ber}(p)$-verteilte Zufallsvariable und definiere $Z := (2X-1)^2$. Was ist die Varianz σ_Z^2? *(Scherzfrage)*

(a) 1

(b) $p(1-p)$

(c) p^2

√ (d) 0

Die ZV Z ist fast sicher konstant (mit Wert 1). Daraus folgt $\sigma_Z^2 = 0$.

7. Sei $\lambda > 0$ und sei X eine Poisson(λ)-verteilte Zufallsvariable. Was ist die Varianz σ_X^2?

(a) 1

(b) $1/\lambda$

√ (c) λ

(d) λ^2

Wir haben in Quiz 5 $\mathbb{E}[X] = \lambda$ und $\mathbb{E}[X^2] = \lambda(\lambda+1)$ berechnet. Somit gilt $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$.

8. Sei $a > 0$ und sei U eine $\mathcal{U}([a, 2a])$-verteilte Zufallsvariable. Was ist die Varianz σ_U^2?

(a) $\frac{a^2}{24}$

√ (b) $\frac{a^2}{12}$

(c) $\frac{a^2}{4}$

(d) $\frac{a^2}{3}$

Wir berechnen zunächst die Varianz einer $\mathcal{U}([a, b])$-verteilte Zufallsvariable Y. Es gilt $\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(y - \frac{b+a}{2})^2 f_Y(y)dy = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x - \frac{b+a}{2})^2 dy = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}(x - \frac{b+a}{2})^3\right]_a^b = \frac{2}{3(b-a)}(\frac{b-a}{2})^3 = \frac{(b-a)^2}{12}$. Somit folgt $\sigma_U^2 = \frac{a^2}{12}$.

9. Sei $\lambda > 0$ und sei X eine $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable. Was ist die Varianz σ_X^2?

(a) 1

(b) $1/\lambda$

(c) λ

√ (d) $1/\lambda^2$

Man berechnet durch partielle Integration

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \underbrace{\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty}_{=0} + \underbrace{\int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx}_{=\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}[X].$$

und somit gilt $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$, wobei wir $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$ aus Quiz 5 verwendet haben.

10. Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $X + Y \sim \mathcal{N}(1, 6)$. Was ist die Varianz σ_Y^2?

(a) 35

√ (b) 5

(c) 1

(d) 0

Aus Proposition 4.26 wissen wir, dass $\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$. Somit folgt $\sigma_Y^2 = \sigma_{X+Y}^2 - \sigma_X^2 = 6 - 1 = 5$.

11. Wir betrachten zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y, die Werte in $\{-1,+1\}$ annehmen, und deren Gewichtsfunktionen/Verteilungen durch

$$p_X(-1) = p_X(1) = 1/2 \quad \text{und} \quad p_Y(-1) = p_Y(1) = 1/2$$

gegeben sind. Wir definieren die Zufallsvariable $Z = X \cdot Y$. Welche Aussagen sind korrekt? *(Mehrere richtige Antworten möglich.)*

$\surd$ (a) Die Zufallsvariablen X und Z sind unabhängig.

Richtig! Wir wollen Proposition 5.6 benutzen und berechnen hierzu die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung von (X,Z):

$$p(-1,-1) = \mathbb{P}[X=-1, Z = X\cdot Y = -1] = \mathbb{P}[X=-1, Y=1] = 1/4$$

und analog

$$p(-1,1) = p(1,-1) = p(1,1) = 1/4.$$

Man überprüft leicht, dass für alle $x,z \in \{-1,1\}$ gilt $p(x,z) = p_X(x)\cdot p_Z(z)$ (siehe unten für die Berechnung von p_Z) und somit folgt die Unabhängigkeit aus Proposition 5.6.

$\surd$ (b) Die Zufallsvariablen Y und Z sind unabhängig.

Richtig! Dies kann man analog zu (a) zeigen.

(c) Die Zufallsvariablen X, Y und Z sind unabhängig.

Leider nicht. Wir betrachten die gemeinsame Gewichtsfunktion/Verteilung von (X,Y,Z) und stellen fest, dass

$$p(1,-1,1) = \mathbb{P}[X=1, Y=-1, Z=1] = 0 \neq 1/8 = p_X(1)\cdot p_Y(-1)\cdot p_Z(1),$$

wobei wir die Berechnung von p_Z (siehe unten) verwendet haben.

Ergänzend berechnen wir die Gewichtsfunktion/Verteilung von Z:

$$p_Z(1) = \mathbb{P}[X\cdot Y = 1] = \mathbb{P}[X=Y=1] + \mathbb{P}[X=Y=-1] = 1/4 + 1/4 = 1/2 \quad \text{und} \quad p_Z(-1) = 1/2,$$

wobei wir erneut die Unabhängigkeit von X und Y verwendet haben.