Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 7

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (11.04.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (12.04.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit der Kovarianz sowie mit gemeinsamen Verteilungen diskreter resp. stetiger Zufallsvariablen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen mit Wertebereichen W_X und W_Y. Falls $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, dann gilt:

(a) X und Y sind unabhängig.

Leider nicht. Aus der Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen folgt, dass $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

(b) $\mathbb{P}[X = x|Y = y] = \mathbb{P}[X = x]$ für alle $x \in W_X$ und $y \in W_Y$.

Leider nicht. Die Aussage ist äquivalent zur Unabhängigkeit von X und Y und somit ist die Aussage falsch (analog zu (a)).

√ (c) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Richtig! Nach Definition gilt $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ und somit folgt die Aussage direkt aus $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

2. Wir betrachten die gemeinsame Verteilung von zwei diskreten Zufallsvariablen X und Y. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

√ (a) Aus der gemeinsamen Gewichtsfunktion kann man immer die einzelnen Gewichtsfunktionen von X und Y berechnen.

Richtig! Die Berechnung erfolgt mittels Proposition 5.4.

(b) Aus den einzelnen Gewichtsfunktionen von X und Y kann man immer die gemeinsame Gewichtsfunktion berechnen.

Leider nicht. Gegenbeispiel: Seien X und Y zwei unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen. Dann haben die Randverteilungen von (X, X) und (X, Y) die gleichen Gewichtsfunktionen, aber (X, X) und (X, Y) haben nicht die gleiche gemeinsame Gewichtsfunktion.

(c) Aus den Gewichtsfunktionen von X und Y und $\mathrm{Cov}(X, Y)$ kann man immer die gemeinsame Gewichtsfunktion berechnen.

Leider nicht. Wir verweisen auf Aufgabe 7.3 für ein Gegenbeispiel.

3. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f. Welche Aussage ist korrekt?

(a) $\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \; dx\, dy$

Leider nicht.

√ (b) $\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dx\, dy$

Richtig!

(c) $\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x, y)\, dx$

Leider nicht.

Dies ist Proposition 5.9 mit $\phi(x, y) = xy$.

4. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte $f_{X,Y}$. Welche Aussage ist korrekt?

√ (a) Die Zufallsvariablen X und Y sind immer stetig.

Richtig! Dies folgt aus Proposition 5.10.

(b) Die Zufallsvariablen X und Y sind nicht notwendigerweise stetig. Dies hängt von $f_{X,Y}$ ab.

Leider nicht.

5. Seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen mit Dichte f_X resp. f_Y. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Die Zufallsvariablen X und Y haben immer eine gemeinsame Dichte.

Leider nicht.

√ (b) Die Zufallsvariablen X und Y haben nicht notwendigerweise eine gemeinsame Dichte.

Richtig!

√ (c) Wenn X und Y unabhängig sind, dann haben die Zufallsvariablen X und Y eine gemeinsame Dichte.

Richtig! In diesem Fall sind die ZVen X und Y gemeinsam stetig mit Dichte $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ (siehe Theorem 5.11)

Wir geben ein Gegenbeispiel, um zu zeigen, dass X und Y nicht immer eine gemeinsame Dichte haben. Sei X eine $\mathcal{U}([0,1])$-verteilte Zufallsvariable und definiere $Y := X$. Angenommen es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\mathbb{P}[X \leq a, Y \leq b] = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Aus Proposition 5.9 würde dann folgen, dass

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{P}[X = Y] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X=Y}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{x=y} f(x,y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,x) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{x=y} dy \right)}_{=0} dx = 0, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Es existiert also keine gemeinsame Dichte.

6. Sei $R \subset \mathbb{R}^2$ ein Viereck mit Eckpunkten $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ und Flächeninhalt $A > 0$. Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte

$$f(x,y) = c \cdot \mathbb{1}_{(x,y) \in R}.$$

Was gilt für die Konstante c?

(a) $c = 1$.

Leider nicht. In diesem Fall gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = A$.

(b) $c = A$.

Leider nicht. In diesem Fall gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = A^2$.

√ (c) $c = A^{-1}$.

Richtig! In diesem Fall gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$.

7. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy & \text{für } -1 \le x \le 0, \ -2 \le y \le 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $f(x,y)$ eine gemeinsame Dichte von zwei stetigen Zufallsvariablen X und Y?

(a) Es kann keine Aussage gemacht werden.

Leider nicht. Es kann eine Aussage gemacht werden, siehe unten.

√ (b) Nein.

Richtig!

(c) Ja.

Leider nicht.

Nach Proposition 5.8 gilt für die gemeinsame Dichte von zwei Zufallsvariablen X und Y, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy\,dx\,dy \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x \left(\int_{-2}^{0} (x+y)\,dy\right) dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{-2}^{0} dx \\ &= \int_{-1}^{0} x^2 - x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

und somit kann f nicht die gemeinsame Dichte von zwei Zufallsvariablen X und Y sein.

8. Seien $(X_i)_{i=1}^n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F_{X_i} = F$. Was ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $M := \max(X_1, \ldots, X_n)$?

√ (a) $F_M(a) = F(a)^n$

Richtig!

(b) $F_M(a) = 1 - F(a)^n$

Leider nicht.

(c) $F_M(a) = (1 - F(a))^n$

Leider nicht.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} F_M(a) &= \mathbb{P}[M \le a] = \mathbb{P}[X_1 \le a, \ldots, X_n \le a] \overset{\text{Unabhängigkeit]}}{=} \mathbb{P}[X_1 \le a] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[X_n \le a] \\ &= F_{X_1}(a) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(a) = F(a)^n. \end{aligned}$$