Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 1

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (28.02.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (01.03.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit dem Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums und den Eigenschaften von σ-Algebren und Wahrscheinlichkeitsmassen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Bei einem Spiel werden zwei Münzen geworfen. Beide Münzen können "Kopf" (K) oder "Zahl" (Z) zeigen. Wir wollen nun einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Spiel betrachten. Was ist ein möglicher Grundraum Ω? (Hier bedeutet z.B. (Z, K), dass die eine Münze "Zahl" und die andere Münze "Kopf" zeigt.)

(a) $\Omega = \{(K, K), (Z, K), (Z, Z)\}$

(b) $\Omega = \{(K, K), (Z, K), (K, Z), (Z, Z)\}$

(c) $\Omega = \{K, Z\}$

2. Zu obigem Grundraum wählen wir die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Wir wollen nun das Ereignis beschreiben, dass mindestens eine der beiden Münzen Zahl zeigt. Welches Element A von $\mathcal{F}$ entspricht diesem Ereignis?

(a) $\{(Z, Z)\}$

(b) $\{(K, Z), (Z, K)\}$

(c) $\{(Z, K), (K, Z), (Z, Z)\}$

(d) $\{(K, K), (Z, K), (K, Z), (K, K)\}$

3. Zu obigem Grundraum wählen wir die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Betrachte nun das Ereignis $A = \{(Z, K), (K, Z)\}$ ("unterschiedliche Ergebnisse auf den beiden Münzen") und das Ereignis $B = \{(Z, K), (K, Z), (K, K)\}$ ("mindestens einmal Kopf"). Was ist die Schnittmenge $A \cap B$?

(a) $\{(Z, K), (K, Z)\}$

(b) $\{(K, K), (Z, Z)\}$

(c) $\{(Z, Z)\}$

(d) $\{(Z, K), (K, Z), (K, K)\}$

4. Betrachte wieder das Ereignis $A = \{(Z,K),(K,Z)\}$ ("unterschiedliche Ergebnisse auf den beiden Münzen") und das Ereignis $B = \{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$ ("mindestens einmal Kopf"). Was ist die Vereinigung $A \cup B$?

(a) $\{(Z,K)\}$

(b) $\{(K,K),(Z,Z)\}$

(c) $\{(Z,Z)\}$

(d) $\{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$

5. Betrachte wieder das Ereignis $A = \{(Z,K),(K,Z)\}$ ("unterschiedliche Ergebnisse auf den beiden Münzen"). Was ist das Komplement von A: A^c?

(a) $\{(Z,K)\}$

(b) $\{(K,K),(Z,Z)\}$

(c) $\{(Z,Z)\}$

(d) $\{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$

6. In obigem Beispiel mit den Münzwürfen ist jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich (weil es sich um faire Münzen handelt). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis $B = \{(Z,K),(K,Z),(K,K)\}$ ("mindestens einmal Kopf") eintritt?

(a) $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$

(b) $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$

7. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien A, B in $\mathcal{F}$. Ist die Aussage "$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ gilt immer." richtig oder falsch?

(a) Diese Aussage ist richtig.

(b) Diese Aussage ist falsch.

8. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\mathcal{F}$ ist eine Teilmenge von Ω.

(b) $\mathcal{F}$ ist eine Teilmenge von $\Omega \times \Omega$.

(c) $\mathcal{F}$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(\Omega)$.

9. Sei $\Omega = \{1,2,3\}$. In welchen der folgenden Fälle ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2,3\}\}$

(b) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$

(c) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

(d) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$

(e) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

(f) $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

10. Sei $\Omega = \{0,1\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. In welchen Fällen erfüllt die Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ die Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmasses auf $(\Omega, \mathcal{F})$?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathbb{P}[\emptyset] = \mathbb{P}[\{0\}] = \mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{0,1\}] = \frac{1}{4}$

(b) $\mathbb{P}[\emptyset] = \mathbb{P}[\{0\}] = \mathbb{P}[\{1\}] = 0$ und $\mathbb{P}[\{0,1\}] = 1$.

(c) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \mathbb{P}[\{1\}] = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}[\{0,1\}] = 1$.

(d) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\{0\}] = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}[\{1\}] = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}[\{0,1\}] = \frac{3}{4}$.

11. Sei $n \geq 2$. Zur Modellierung von n Würfen eines Würfels betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}[\omega] = \frac{1}{6^n}$ für alle $\omega \in \Omega$. Für $1 \leq i \leq 6$ definieren wir die Ereignisse

$$A_i = \{\text{Der Würfel zeigt bei mindestens einem Wurf die Augenzahl } i.\}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathbb{P}[A_1] = \left(\frac{1}{6}\right)^n$

(b) $\mathbb{P}[A_2] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

(c) $\mathbb{P}[A_3] + \mathbb{P}[A_4] = \mathbb{P}[A_3 \cup A_4]$

(d) $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6] = 1$

(e) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_1] = 1$