Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 11

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (16.05.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (17.05.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Konfidenzintervallen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $X \sim \chi_n^2$. Was ist der Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$?

(a) 1

(b) 2

(c) $n/2$

(d) n

(e) n^2

2. Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \chi_1^2$, $c > 0$. Sei $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c} e^{-x^2/2} dx$. Was ist $\mathbb{P}[-c \leq X \leq c]$?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\Phi(c)$

(b) $1 - \Phi(c)$

(c) $2\Phi(c) - 1$

(d) $\mathbb{P}[Y \leq c]$

3. Wir betrachten eine Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, und $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen. Sei $\alpha \in [0, 1]$. Ein Konfidenzintervall für θ mit Niveau $1 - \alpha$ ist:
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) ein Zufallsintervall $I = [A, B]$, sodass gilt

$$\forall\theta \in \Theta \qquad \mathbb{P}_\theta[A \le \theta \le B] \ge \alpha, \tag{1}$$

wobei A, B Zufallsvariablen der Form $A = a(X_1, \dots, X_n)$, $B = b(X_1, \dots, X_n)$ mittels $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind.

(b) ein Zufallsintervall $I = [T - \frac{1.96}{\sqrt{n}}, T + \frac{1.96}{\sqrt{n}}]$, wobei T ein erwartungstreu Schätzer für θ ist.

(c) ein Zufallsintervall $I = [A, B]$, sodass gilt

$$\forall\theta \in \Theta \qquad \mathbb{P}_\theta[\theta \in [A, B]] \ge 1 - \alpha, \tag{2}$$

wobei A, B Zufallsvariablen der Form $A = a(X_1, \dots, X_n)$, $B = b(X_1, \dots, X_n)$ mittels $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind.

(d) ein Intervall $I = [a, b]$, sodass gilt

$$\forall\theta \in \Theta \quad \mathbb{P}_\theta[a \le T \le b] \ge 1 - \alpha. \tag{3}$$

wobei T ein erwartungstreu Schätzer für θ ist

(e) ein Zufallsintervall $I = [A, B]$, sodass gilt

$$\forall\theta \in \Theta \qquad \mathbb{P}_\theta[A \le \theta \le B] \ge 1 - \alpha, \tag{4}$$

wobei A, B Zufallsvariablen der Form $A = a(X_1, \dots, X_n)$, $B = b(X_1, \dots, X_n)$ mittels $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind.

4. Sei $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$.
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi_n^2$

(b) $(X_1 + \cdots + X_n)^2 \sim \chi_n^2$

(c) $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)^2 \sim \chi_1^2$

(d) $X_1^2 + X_2^2 \sim \mathrm{Exp}(1/2)$

5. Sei $X_0, \dots, X_n$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}(0,1)$.
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\frac{X_0}{\sqrt{\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n}}} \sim t_n$

(b) $\frac{X_0}{\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}} \sim t_n$

(c) $\frac{X_0^2}{\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}} \sim t_n$

(d) $\frac{X_0+X_1}{\sqrt{\frac{2X_2^2+\cdots+2X_n^2}{n-1}}} \sim t_{n-1}$

6. Sei $\Theta = \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, wobei $X_1, \dots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$. Sei $T = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Welche der folgenden Intervalle sind Konfidenzintervalle für θ mit Niveau 95%?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $I = [-5, 5]$

(b) $J = [T - \frac{1.96}{\sqrt{n}}, T + \frac{1.96}{\sqrt{n}}]$

(c) $K = [T - 1.96, T + 1.96]$

(d) $L = [T - 5, T + 5]$