Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 13

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (30.05.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (31.05.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Likelihood-Quotient-Test und dem P-Wert.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, $\Theta_A = \{\theta_A\}$ und $c \geq 0$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$ und unter $\mathbb{P}_{\theta_A}$. Was ist der Likelihood-Quotient-Test mit Parameter c?

(a) Es ist der Test (T, K) mit Teststatistik

$$T = \frac{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)}{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_A)}$$

und Verwerfungsbereich $K = (c, \infty]$.

(b) Es ist der Test (T, K) mit Teststatistik

$$T = \frac{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_A)}{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)}$$

und Verwerfungsbereich $K = (c, \infty]$.

(c) Es ist der Test (T, K) mit Teststatistik

$$T = \frac{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)}{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_A)}$$

und Verwerfungsbereich $K = [-\infty, c)$.

(d) Es ist der Test (T, K) mit Teststatistik

$$T = \frac{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_A)}{L(X_1, \ldots, X_n; \theta_0)}$$

und Verwerfungsbereich $K = [-\infty, c)$.

2. Sei $\Theta = \mathbb{R}$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $X_1 \sim \mathcal{U}([\theta, \theta+2])$ unter $\mathbb{P}_\theta$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1$. Was ist der Likelihood-Quotient?

(a)
$$R(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{1}_{x_1,\ldots,x_n \in [1,2]}$$

(b)
$$R(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{1}_{x_1,\ldots,x_n \in [0,3]}$$

(c)
$$R(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\mathbb{1}_{x_1,\ldots,x_n \in [1,3]}}{\mathbb{1}_{x_1,\ldots,x_n \in [0,2]}}$$

(d)
$$R(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\mathbb{1}_{x_1,\ldots,x_n \in [0,2]}}{\mathbb{1}_{x_1,\ldots,x_n \in [1,3]}}$$

3. Sei $\Theta = \mathbb{R}$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $X_1 \sim \mathcal{U}([\theta, \theta+2])$ unter $\mathbb{P}_\theta$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1$. Wir betrachten den Likelihood-Quotienten-Test mit Parameter $c \geq 0$. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Für die Teststatistik gilt $T \in \{0, 1, \infty\}$.

(b) Für die Teststatistik gilt $T \in [0, 1]$.

(c) Für die Teststatistik gilt $T \geq 0$.

4. Sei $\Theta = \mathbb{R}$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. mit $X_1 \sim \mathcal{U}([\theta, \theta+2])$ unter $\mathbb{P}_\theta$. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : \theta = 0$ und die Alternativhypothese $H_A : \theta = 1$. Wir betrachten den Likelihood-Quotienten-Test mit Parameter $c \geq 0$. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Für $c = 0$ hat der Test exakt Signifikanzniveau $\alpha^* = (\frac{1}{2})^n$.

(b) Für $c = 0$ hat der Test exakt Signifikanzniveau $\alpha^* = 1$.

(c) Für $c = 2$ hat der Test exakt Signifikanzniveau $\alpha^* = (\frac{1}{2})^n$.

(d) Für $c = 2$ hat der Test exakt Signifikanzniveau $\alpha^* = 0$.

5. Sei $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ und $\Theta_A = \{\theta_A\}$. Angenommen der Likelihood-Quotient ist wohldefiniert. Unter welchen Bedingungen gilt die folgende Aussage?
“Für jedes $\alpha \in (0,1)$ existiert immer ein Likelihood-Quotient-Test mit Signifikanzniveau exakt α, also $\mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K] = \alpha$.”

(a) Die Ausage gilt, falls $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. diskrete Zufallsvariablen (unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$) sind.

(b) Die Ausage gilt, falls die Zufallsvariable $R(X_1, \ldots, X_n)$ stetig (unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$) ist.

(c) Die Aussage gilt immer.

(d) Die Aussage gilt nie.

6. Seien $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, $\Theta_A = \{\theta_A\}$. Wir betrachten den Likelihood-Quotient-Test (T, K) mit Parameter $c \geq 0$. Sei $\alpha^* = \mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K]$ und sei (T', K') ein anderer Test mit Signifikanzniveau $\alpha \leq \alpha^*$. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) Die Macht von (T', K') ist immer grösser als die Macht von (T, K).

(b) Der Macht von (T', K') ist immer kleiner als die Macht von (T, K).

(c) $\mathbb{P}_{\theta_A}[T \in K] \leq \mathbb{P}_{\theta_A}[T' \in K']$

(d) $\mathbb{P}_{\theta_A}[T \in K] \geq \mathbb{P}_{\theta_A}[T' \in K']$