D-INFK
FS 2022

Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 2

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (07.03.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (08.03.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Zufallsvariablen, Verteilungsfunktionen, bedingten Wahrscheinlichkeiten und dem Konzept der Unabhängigkeit.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien A, B in $\mathcal{F}$. Wir nehmen an, dass A eine echte Teilmenge von B ist, d.h. $A \subset B$ und $A \neq B$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

(b) $\mathbb{P}[A] < \mathbb{P}[B]$

(c) $\mathbb{P}[A] \geq \mathbb{P}[B]$

(d) $\mathbb{P}[A] > \mathbb{P}[B]$

2. Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra und $(A_n)_{n\geq 1}$ Elemente von $\mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(b) $A_1 \cup A_2 \cup A_4 \in \mathcal{F}$

(c) $(A_2)^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$

(d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

3. Sei $\Omega = [0,1]$ und $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra, sodass $[a,b] \in \mathcal{F}$ für alle $0 \leq a \leq b \leq 1$ gilt (also auch $\{a\} \in \mathcal{F}$). Welche der folgenden Mengen sind Elemente von $\mathcal{F}$?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\emptyset$

(b) $(\frac{1}{2}, 1]$

(c) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

(d) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

4. Wir betrachten zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$. Wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A|B]$ definiert?

(a) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A \cap B]$

(b) $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$

(c) $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]}$

(d) $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A \cup B]}$

5. Unter welchen Annahmen gilt die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\forall A \in F, \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]\,?$$

(a) Die Formel gilt für alle Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$.

(b) Die Formel gilt, wenn die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt sind, d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

(c) Die Formel gilt, wenn die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ die Bedingung $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ erfüllen.

(d) Die Formel gilt, wenn die Ereignisse $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt sind, d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, und die Bedingung $B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ erfüllen.

6. Wir betrachten zwei unabhängige Ereignisse $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$

(b) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$

(c) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

7. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathcal{F}$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) A ist unabhängig von sich selbst ist genau dann, wenn $\mathbb{P}[A] = 0$.

(b) A ist unabhängig von sich selbst ist genau dann, wenn $\mathbb{P}[A] = 1$.

(c) A ist unabhängig von sich selbst ist genau dann, wenn $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$.

(d) A kann nicht unabhängig von sich selbst sein.

8. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$ drei paarweise unabhängige Ereignisse, d.h. $\mathbb{P}[A_i \cap A_j] = \mathbb{P}[A_i] \cdot \mathbb{P}[A_j]$ für $1 \leq i \neq j \leq 3$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) Die Ereignisse A_1, A_2, A_3 sind zwangsläufig unabhängig.

(b) Die Ereignisse A_1, A_2, A_3 sind nicht zwangsläufig unabhängig.

9. Bei einem Zufallsexperiment werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, die σ-Algebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und das Wahrscheinlichkeitsmass $\mathbb{P}$ definiert durch

$$\mathbb{P}[(\omega_1, \omega_2)] = 1/36, \quad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

Als Zufallsvariablen betrachten wir

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 \end{cases} \qquad \text{"Augenzahl des ersten Würfels"}$$

$$Y : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_2 \end{cases} \qquad \text{"Augenzahl des zweiten Würfels"}$$

$$S : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ (\omega_1, \omega_2) & \mapsto \omega_1 + \omega_2 \end{cases} \qquad \text{"Augensumme der beiden Würfel"}$$

Welche Werte kann S annehmen (mit positiver Wahrscheinlichkeit)?

(a) S nimmt Werte in $\{1, \dots, 12\}$ an.

(b) S nimmt Werte in $\{2, \dots, 12\}$ an.

(c) S nimmt Werte in $\{1, \dots, 6\}^2$ an.

10. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{P}[S = 9 | Y = 3]$?

(a) 0

(b) 1/36

(c) 1/6

(d) 1/4

11. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{P}[S = 9]$?

(a) 1/12

(b) 1/9

(c) 1/6

(d) 1/4

12. Wir betrachten weiterhin das Zufallsexperiment mit zwei Würfeln. Was ist $\mathbb{P}[Y = 3|S = 9]$?

(a) 0

(b) 1/36

(c) 1/6

(d) 1/4

13. Sei X eine beliebige Zufallsvariable, die n verschiedene Werte $x_1, \ldots, x_n$ annehmen kann. Was ist $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X = x_i]$?

(a) 0

(b) 1

(c) ∞

(d) 0.5

(e) -1

(f) Kann man ohne weitere Angaben nicht lösen!