

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 3

**Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (14.03.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (15.03.2022), um 14:15 Uhr**

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Verteilungsfunktionen, verallgemeinerten Inversen und mit der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
<https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/>

1. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X . Was gilt für $a < b$?

- (a) $\mathbb{P}[a < X < b] = F_X(b) - F_X(a)$
- (b) $\mathbb{P}[a \leq X < b] = F_X(b) - F_X(a)$
- (c) $\mathbb{P}[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$
- (d) $\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$

2. Sei F eine Verteilungsfunktion. Welche Aussagen sind korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

- (a) F ist monoton wachsend.
- (b) F ist monoton fallend.
- (c) $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a) = \infty$
- (d) $\lim_{a \rightarrow 0} F(a) = 0$

3. Sei F eine Verteilungsfunktion. Welche Aussagen sind im Allgemeinen korrekt?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

- (a) F ist stetig.
- (b) F ist rechtsseitig stetig.
- (c) F ist nicht linksseitig stetig.

4. Sei X eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[X = -1] = 1/4$, $\mathbb{P}[X = 0] = 1/4$ und $\mathbb{P}[X = 1] = 1/2$. Was ist die Verteilungsfunktion F_X ?

(a)

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ 1/4 & \text{für } -1 \leq x < 0, \\ 1/2 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(b)

$$F_X(a) = \begin{cases} 1/4 & \text{für } x = -1, \\ 1/4 & \text{für } x = 0, \\ 1/2 & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{für } x \notin \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

(c)

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1, \\ (x+1)/2 & \text{für } -1 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

5. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X :

$$F_X(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0, \\ a/2 & \text{für } 0 \leq a < 2, \\ 1 & \text{für } a \geq 2. \end{cases}$$

Welche Aussagen über die Zufallsvariable X sind korrekt?

(Mehrere richtige Antworten möglich.)

- (a) $\mathbb{P}[X \geq 2] = 1$
- (b) $\mathbb{P}[X = 1] = 0$
- (c) $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 1] = 1/2$
- (d) $\mathbb{P}[0 \leq X \leq 1] = 1$
- (e) $\mathbb{P}[X \geq 0] = 1$
- (f) $\mathbb{P}[X \geq 1] = \mathbb{P}[X \leq 1]$

6. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < -5, \\ \frac{a+5}{10} & \text{für } -5 \leq a < 5, \\ 1 & \text{für } a \geq 5. \end{cases}$$

Was ist die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ von F ?

(a) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = 10\alpha + 5.$$

(b) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = 10\alpha - 5.$$

(c) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = 10(\alpha - 5).$$

7. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 0, \\ 1/2 & \text{für } 0 \leq a < 1, \\ 3/4 & \text{für } 1 \leq a < 2, \\ 1 & \text{für } 2 \leq a. \end{cases}$$

Was ist die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ von F ?

(a)

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \alpha < 1/2, \\ 1 & \text{für } 1/2 \leq \alpha < 3/4, \\ 2 & \text{für } 3/4 \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

(b)

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < \alpha \leq 1/2, \\ 2 & \text{für } 1/2 < \alpha \leq 3/4, \\ \infty & \text{für } 3/4 < \alpha < 1. \end{cases}$$

(c)

$$F^{-1}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \alpha \leq 1/2, \\ 1 & \text{für } 1/2 < \alpha \leq 3/4, \\ 2 & \text{für } 3/4 < \alpha < 1. \end{cases}$$

8. Wir betrachten die folgende Verteilungsfunktion

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{für } a < 1, \\ 1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2 & \text{für } a \geq 1. \end{cases}$$

Was ist die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ von F ?

(a) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}.$$

(b) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

(c) Für alle $0 < \alpha < 1$,

$$F^{-1}(\alpha) = \frac{1}{1-\sqrt{\alpha}}$$

9. Seien X_1, X_2 und X_3 drei Zufallsvariablen. Welche Aussage ist korrekt?

(a) X_1, X_2, X_3 sind unabhängig, wenn für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3] = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1] \cdot \mathbb{P}[X_2 \leq x_2] \cdot \mathbb{P}[X_3 \leq x_3].$$

(b) X_1, X_2, X_3 sind unabhängig, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[X_1 \leq x, X_2 \leq x, X_3 \leq x] = \mathbb{P}[X_1 \leq x] \cdot \mathbb{P}[X_2 \leq x] \cdot \mathbb{P}[X_3 \leq x].$$

10. Wir betrachten den Wurf von zwei unabhängigen Würfeln. Der Grundraum ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ und ein Element $\omega \in \Omega$ ist ein Paar $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, wobei die erste Koordinate die Augenzahl des ersten Würfels repräsentiert und die zweite Koordinate die Augenzahl des zweiten Würfels. Wir definieren die Zufallsvariablen $X, Y, Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$X(\omega) = \omega_1, \quad Y(\omega) = (\omega_2)^2, \quad Z(\omega) = \omega_1 - \omega_2.$$

Welche Aussagen sind korrekt? (*Mehrere richtige Antworten möglich.*)

(a) X und Y sind unabhängig.

(b) X und Z sind unabhängig.

(c) Y und Z sind unabhängig.