Prof. Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Quiz 9

Onlineabgabe vor Beginn der Übungsstunde:
Montag (02.05.2022) um 16:15 Uhr oder Dienstag (03.05.2022), um 14:15 Uhr

Dieser Quiz beschäftigt sich mit Schätzern und deren Eigenschaften am Beispiel der geometrischen Verteilung.

Weitere Informationen und Instruktionen zur Abgabe unter
https://metaphor.ethz.ch/x/2022/fs/401-0614-00L/

---

1. Eddy schlägt Sophie ein Spiel vor: Er wirft eine Münze solange, bis zum ersten Mal Kopf fällt. Angenommen beim k-ten Wurf fällt das erste Mal Kopf. Wenn $k \geq 3$, bekommt er von Sophie k CHF. Wenn $k \in \{1, 2\}$, bekommt Sophie von ihm k CHF.
Was ist Sophies erwarteter Gewinn, wenn die Münze gezinkt ist (Kopf mit Wahrscheinlichkeit p)?
Tipp: Der Erwartungswert einer Geom(p)-verteilten Zufallsvariable ist $1/p$.

(a) $\frac{2p^2-1}{p}$

(b) $\frac{6p^2-4p^3-1}{p}$

(c) $\frac{3p^2-2p^3-1}{p}$

2. Wir betrachten weiterhin das gleiche Spiel. Sophie weiss nicht, ob die Münze gezinkt ist, und bittet Eddy, die Münze *vorab* einige Male zu werfen, bis insgesamt 5 Mal Kopf gefallen ist. Sie beobachtet die Ergebnisse der Münzwürfe

$$0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1$$

und notiert sich die Daten

$$2, 3, 1, 4, 2$$

also wie lange es jeweils bis zum nächsten Mal Kopf gedauert hat. Sophie betrachtet die Daten als realisierte Werte von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_5$. Welcher Parameterraum Θ und welche Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ eignen sich in diesem Fall?

(a) Parameterraum $\Theta = [0, 1]$ und Wahrscheinlichkeitsmasse $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, sodass $X_1, \dots, X_5$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_i \sim \mathrm{Geom}(\theta)$.

(b) Parameterraum $\Theta \in (0, +\infty)$ und Wahrscheinlichkeitsmasse $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, sodass $X_1, \dots, X_5$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_i \sim \mathrm{Geom}(\theta)$.

(c) Parameterraum $\Theta \in (0, +\infty)$ und Wahrscheinlichkeitsmasse $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, sodass $X_1, \dots, X_5$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_i \sim \mathrm{Exp}(\theta)$.

3. Sei $\Theta = \mathbb{N}$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen. Wir betrachten die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$, sodass $X_1, \ldots, X_n$ unter $\mathbb{P}_\theta$ unabhängig, identisch verteilt sind mit $X_i \sim \mathrm{Bin}(\theta, 1/2)$. Welche der folgenden Schätzer sind erwartungstreu?
(Mehrere richtige Antworten möglich.)

(a) $T_1 = X_1$

(b) $T_2 = 2X_1$

(c) $T_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

(d) $T_4 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

4. Wir betrachten erneut die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ aus Frage 3. Was ist der mittlere quadratische Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T_1]$ des Schätzers $T_1 = X_1$ im Modell $\mathbb{P}_\theta$?

(a) θ

(b) $\frac{\theta + \theta^2}{4}$

(c) $\frac{\theta}{4n} + \frac{\theta^2}{4}$

(d) $\frac{\theta}{n}$

5. Wir betrachten erneut die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ aus Frage 3. Was ist der mittlere quadratische Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T_2]$ des Schätzers $T_2 = 2X_1$ im Modell $\mathbb{P}_\theta$?

(a) $\frac{\theta}{4n} + \frac{\theta^2}{4}$

(b) $\frac{\theta + \theta^2}{4}$

(c) $\frac{\theta}{n}$

(d) θ

6. Wir betrachten erneut die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ aus Frage 3. Was ist der mittlere quadratische Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T_3]$ des Schätzers $T_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ im Modell $\mathbb{P}_\theta$?

(a) $\frac{\theta + \theta^2}{4}$

(b) θ

(c) $\frac{\theta}{n}$

(d) $\frac{\theta}{4n} + \frac{\theta^2}{4}$

7. Wir betrachten erneut die Modellfamilie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ aus Frage 3. Was ist der mittlere quadratische Schätzfehler $\mathrm{MSE}_\theta[T_4]$ des Schätzers $T_4 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ im Modell $\mathbb{P}_\theta$?

(a) $\frac{\theta}{n}$

(b) $\frac{\theta + \theta^2}{4}$

(c) $\frac{\theta}{4n} + \frac{\theta^2}{4}$

(d) θ