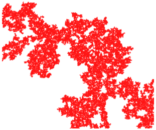
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik



Vincent Tassion
Laurin Köhler-Schindler

ETH zürich

Februar 23, 2022

Der Plan für Heute

1. **Perkolationstheorie**

Der Plan für Heute

1. **Perkolationstheorie**

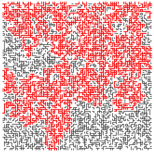
2. **Einführung in die Wahrscheinlichkeit**

Der Plan für Heute

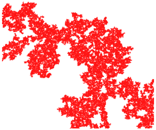
1. **Perkolationstheorie**
2. **Einführung in die Wahrscheinlichkeit**
3. **Administrative und praktische Organisation des Kurses**

Der Plan für Heute

1. **Perkolationstheorie**
2. **Einführung in die Wahrscheinlichkeit**
3. **Administrative und praktische Organisation des Kurses**
4. **Kapitel 1: Grundbegriffe**



1. Perkolationstheorie



Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Die Perkolationstheorie untersucht, wie sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium ausbreitet. zB:

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Die Perkolationstheorie untersucht, wie sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium ausbreitet. zB:

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Die Perkolationstheorie untersucht, wie sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium ausbreitet. zB:

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

In beiden Fällen beobachten wir ein Phasenübergangsphänomen:

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Wenn man einen Stein in Wasser taucht, hat es entweder wenige Löcher, und das Wasser bleibt an der Oberfläche des Steines

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Oder der Stein ist porös genug und das Wasser kann sich durch den ganzen Stein ausbreiten.

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Im zweiten Beispiel hat entweder der Wald wenig Bäume, und ein Feuer bleibt auf ein paar Bäume lokalisiert.

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

Oder der Wald ist dicht und ein Feuer breitet sich durch den ganzen Wald aus.

Wie breitet sich eine Flüssigkeit in einem zufälligen Medium aus?

Wie breitet sich Wasser in porösen Steinen aus?

Wie breitet sich ein Feuer in einem Wald aus?

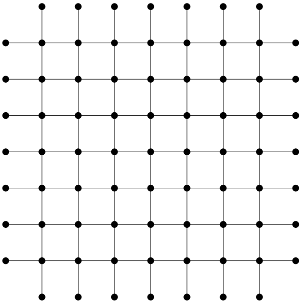
Oder der Wald ist dicht und ein Feuer breitet sich durch den ganzen Wald aus.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]

.

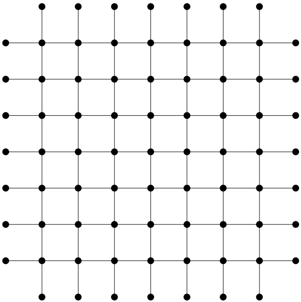
Das bekannteste Perkolationsmodell für solche Phasenübergänge heisst Bernoulli-Perkolation. Es wurde vor 60 Jahren von Broadbent und Hammersley eingeführt.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Um die Mathematische Definition dieses Modells zu geben, betrachten wir ein $2n \times 2n$ Quadrat.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



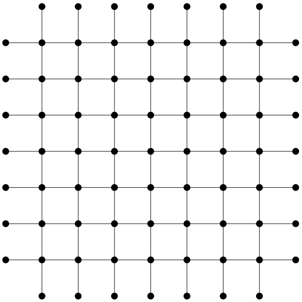
Knoten: $V = \{-n, \dots, n\}^2.$

Kanten: $E = \{e_1, \dots, e_N\}.$

.

Es ist der Graph mit der Knotenmenge $\{-n, \dots, n\}^2$ und Kanten zwischen den Knoten im euklidischen Abstand 1 voneinander.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



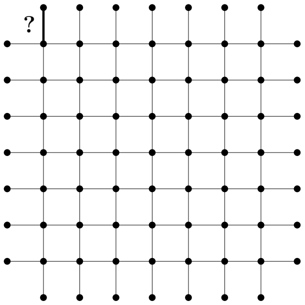
Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Wir betrachten auch einen Parameter p zwischen 0 und 1. Dieser Parameter stellt die Porosität des Steins dar.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

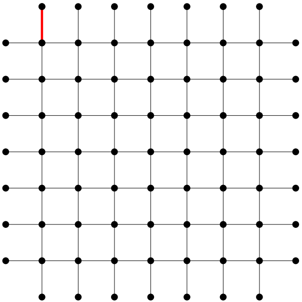
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Für jede Kante e werfen wir eine Münze: – die Kante e ist offen mit Wahrscheinlichkeit p.
– und geschlossen mit Wahrsch. $1 - p$

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

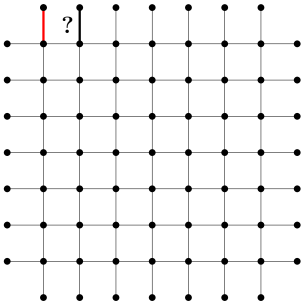
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Zum Beispiel ist diese erste Kante offen.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

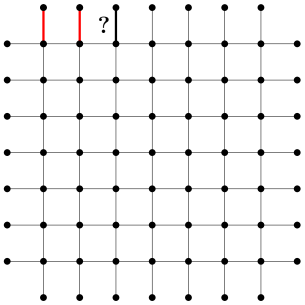
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Die zweite?

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

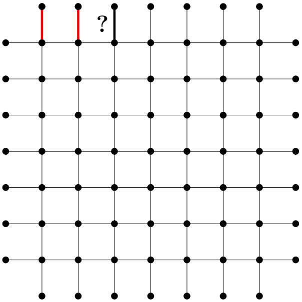
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Die zweite? Die zweite auch.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \dots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \dots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

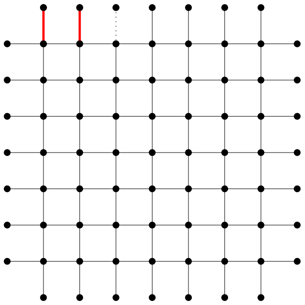
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Die dritte?

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

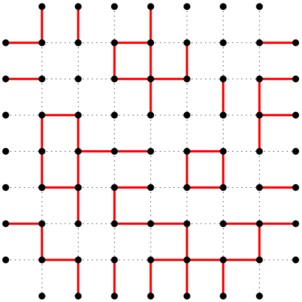
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Die dritte? Die dritte ist geschlossen . . . und so weiter.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

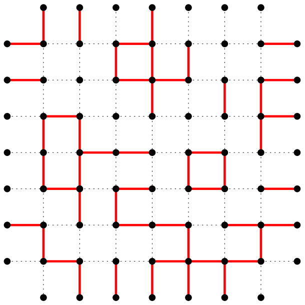
Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Am Ende dieser Operation bekommen wir eine zufällige Konfiguration.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

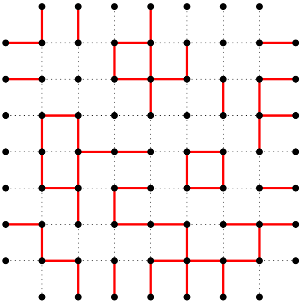
➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Wahrscheinlichkeitsmodell:

$\boxed{(X_e)_{e \in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

Mathematisch ist diese zufällige Konfiguration gegeben durch eine Sammlung $X = (X_e)$, für e in der Kantenmenge E, von unabhängig Bernoulli ZVs.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

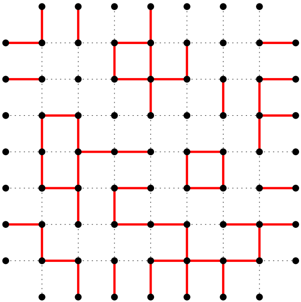
➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Wahrscheinlichkeitsmodell:

$\boxed{(X_e)_{e \in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

Eine Art zu denken über X ist, es als einen zufälligen Untergraph von dem Quadrat zu betrachten.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

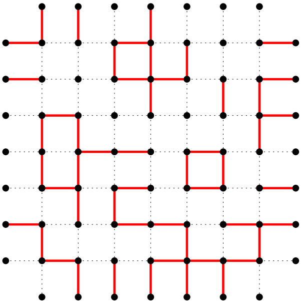
➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Wahrscheinlichkeitsmodell:

$\boxed{(X_e)_{e \in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

Die Terminologie offen/geschlossen kommt von der Interpretation von X als poröses Material

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

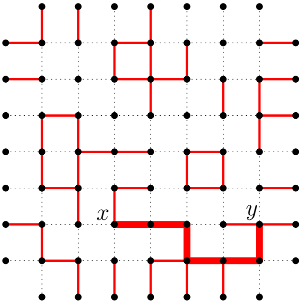
➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Wahrscheinlichkeitsmodell:

$\boxed{(X_e)_{e \in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

die Kanten stellen Poren dar: – Entweder ist eine Kante offen und Wasser kann durch sie fließen – Oder sie ist geschlossen und es fließt kein Wasser.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{X_e = 0}$.

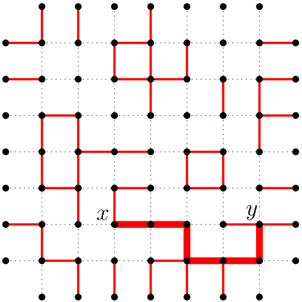
Wahrscheinlichkeitsmodell:

$\boxed{(X_e)_{e \in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Allgemeiner ist Ein Pfad offen, wenn alle Kanten dieses Pfades offen sind. Auf dem Bild sieht man zum Beispiel einen offenen Pfad von x nach y.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Wahrscheinlichkeitsmodell:

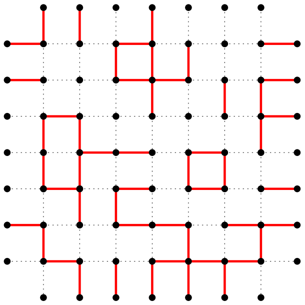
$\boxed{(X_e)_{e\in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e : X_e = 1\})$.

Schließlich definieren wir die Cluster der Percolationskonfiguration.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \dots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \dots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Wahrscheinlichkeitsmodell:

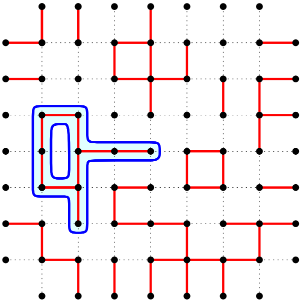
$\boxed{(X_e)_{e \in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e : X_e = 1\})$.

Ein Cluster ist eine zusammenhängende Komponente des Graphen mit Knotenmenge $\{-n, \dots, n\}^2$ und Kantenmenge "die Menge der offener Kante".

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Wahrscheinlichkeitsmodell:

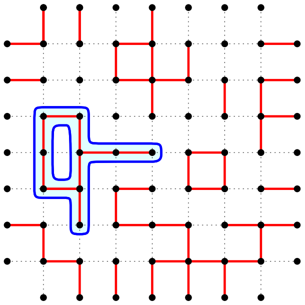
$\boxed{(X_e)_{e \in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e : X_e = 1\})$.

Auf dem Bild sieht man zum Beispiel einen Cluster in blau.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Wahrscheinlichkeitsmodell:

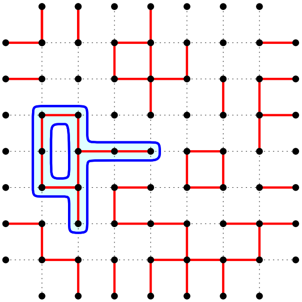
$\boxed{(X_e)_{e \in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e : X_e = 1\})$.

Der Cluster eines Punkts x ist das ganze eingedrungene Gebiet, wenn man Wasser in x injiziert.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1 - p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Wahrscheinlichkeitsmodell:

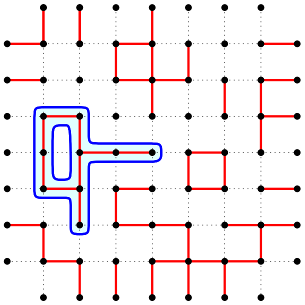
$\boxed{(X_e)_{e \in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e : X_e = 1\})$.

Ich möchte die Rolle von p betonen. Falls p klein ist, gibt es wenige Kanten. Falls p gross ist, gibt es viele Kanten.

Perkolation in einer Box [Broadbent and Hammersley, 1957]



Knoten: $V = \{-n, \ldots, n\}^2$.

Kanten: $E = \{e_1, \ldots, e_N\}$.

Parameter: $\boxed{0 \leqslant p \leqslant 1}$.

Die Kante e ist

➜ **offen** (rot) mit Wahr. p. $\boxed{X_e = 1}$.

➜ **geschl.** mit Wahr. $1-p$ $\boxed{X_e = 0}$.

Wahrscheinlichkeitsmodell:

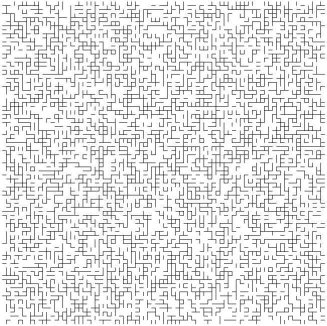
$\boxed{(X_e)_{e \in E} \text{ unabhängige Bernoulli(p) ZV.}}$

Offener Pfad: Pfad mit offenen Kanten.

Cluster: Zusammenhangskomponenten von $(V, \{e : X_e = 1\})$.

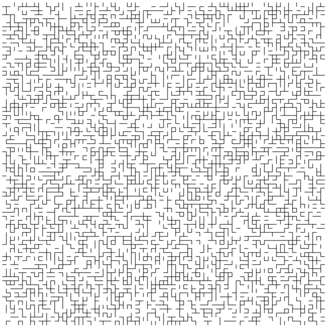
Ich möchte die Rolle von p betonen. Falls p klein ist, gibt es wenige Kanten. Falls p gross ist, gibt es viele Kanten.

Ein poröser Stein?



Wenn wir über Perkolation als ein poröses Material nachdenken, kommt natürlich die Frage: “Fließt Wasser von oben nach unten?”

Ein poröser Stein?



Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

Mathematisch bedeutet diese Frage: Existiert ein offener Pfad von Oben nach Unten?

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

Auf dieser Simulation färben wir alle Cluster rot, die die Oberseite des Quadrats berühren. Dann merken wir, dass kein offener Pfad existiert.

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

Eigentlich hängt die Antwort dieser Frage von p ab:

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

Erstens ist für $p = 0$ keine Kante offen und es gibt sicher keine offenen Pfade.

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

Für p=1 sind alle Kanten offen und offensichtlich existiert immer ein offener Pfad.

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

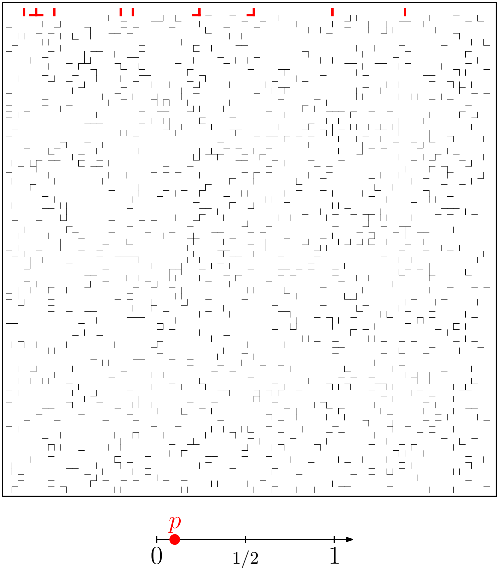
Jetzt schauen wir Simulationen in einer 100x100-Box an, wenn p von 0 bis 1 variiert.

Ein poröser Stein?

Existiert ein offener Pfad von oben nach unten
in einem großen Quadrat?

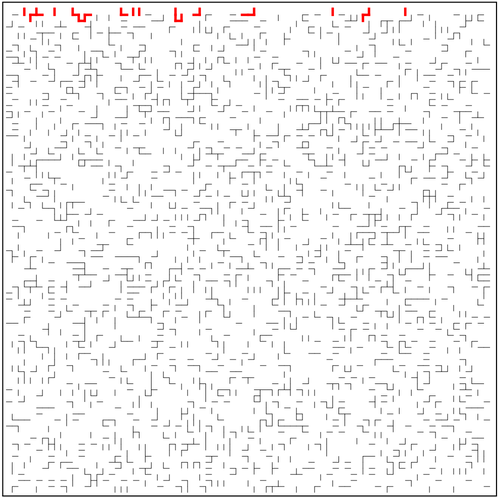
Jetzt schauen wir Simulationen in einer 100x100-Box an, wenn p von 0 bis 1 variiert.

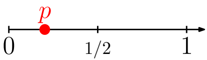
Fließt Wasser von oben nach unten?



Falls p klein ist, gibt es sehr wenige offene Kanten. Man beobachtet keinen offenen Pfad von Oben nach Unten: das Wasser ist blockiert.

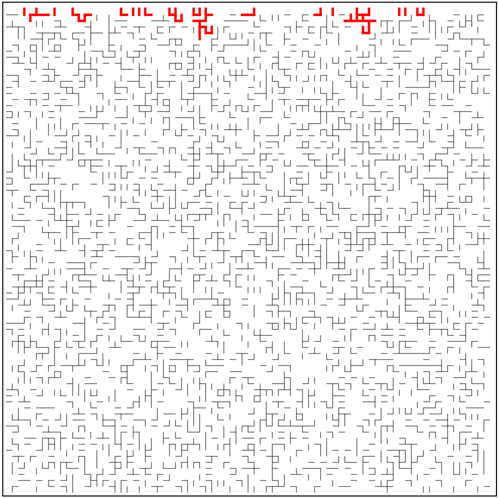
Fließt Wasser von oben nach unten?

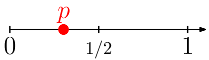




Falls p größer wird, gibt es mehr und mehr offene Kanten. Aber so lange p kleiner als 1/2 bleibt, beobachten wir in Simulation nie einen offenen Pfad.

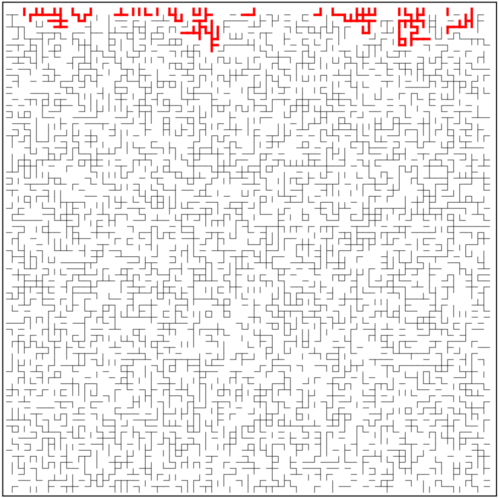
Fließt Wasser von oben nach unten?

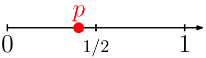




Falls p größer wird, gibt es mehr und mehr offene Kanten. Aber so lange p kleiner als 1/2 bleibt, beobachten wir in Simulation nie einen offenen Pfad.

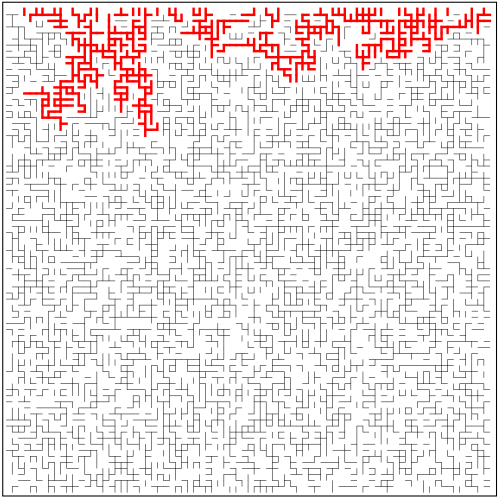
Fließt Wasser von oben nach unten?

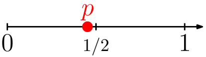




Falls p größer wird, gibt es mehr und mehr offene Kanten. Aber so lange p kleiner als 1/2 bleibt, beobachten wir in Simulation nie einen offenen Pfad.

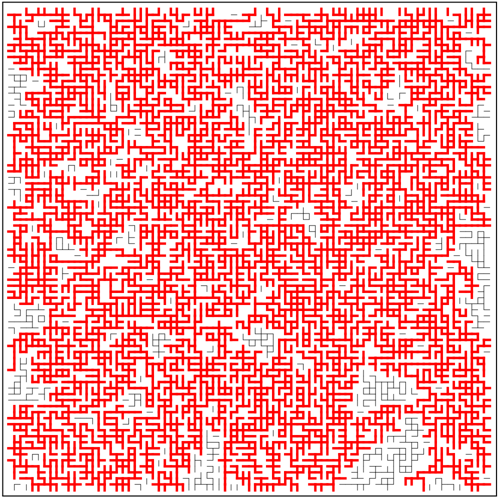
Fließt Wasser von oben nach unten?

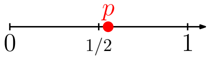




Falls p größer wird, gibt es mehr und mehr offene Kanten. Aber so lange p kleiner als 1/2 bleibt, beobachten wir in Simulation nie einen offenen Pfad.

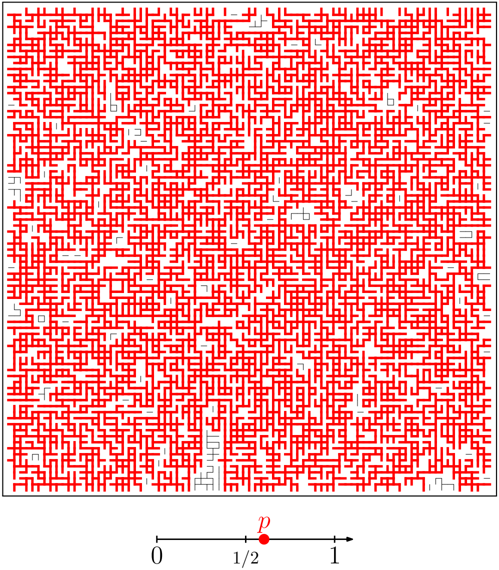
Fließt Wasser von oben nach unten?





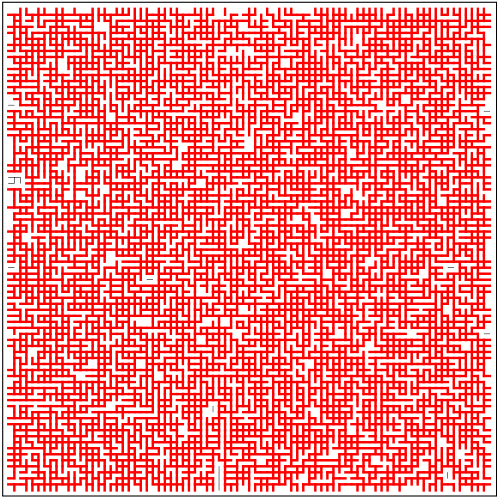
Im Gegenteil, sobald p größer als 1/2 wird, gibt es genug offene Kanten. Und wir beobachten immer einen offenen Pfad von oben nach unten.

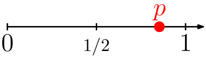
Fließt Wasser von oben nach unten?



Es wird mehr und mehr der Fall, wenn p grösser wird.

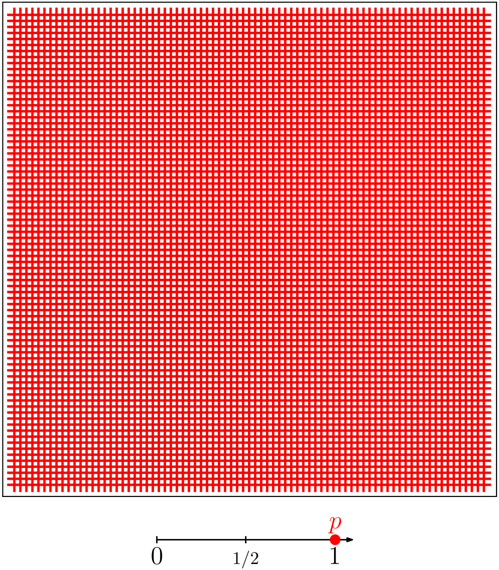
Fließt Wasser von oben nach unten?





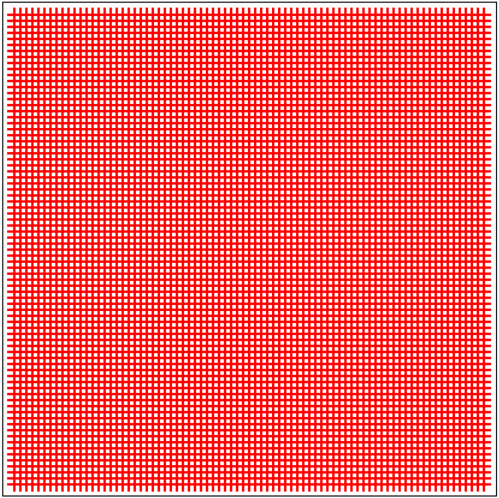
Es wird mehr und mehr der Fall, wenn p grösser wird.

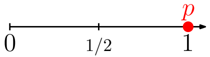
Fließt Wasser von oben nach unten?



Und am Ende, für $p = 1$ sind alle die Kanten offen.

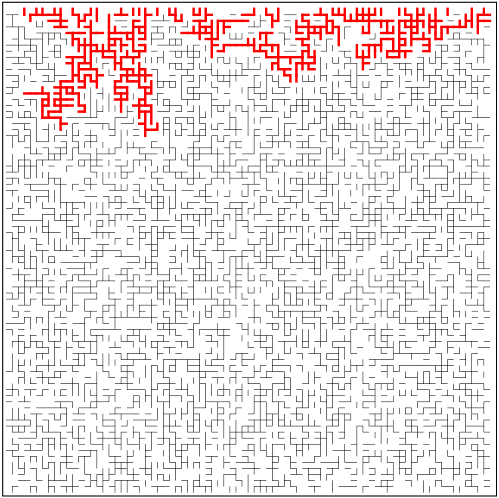
Fließt Wasser von oben nach unten?

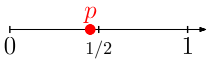




Abschließend zeigen die Simulationen eine drastische Verhaltensänderung bei einem kritischen Wert p=1/2.

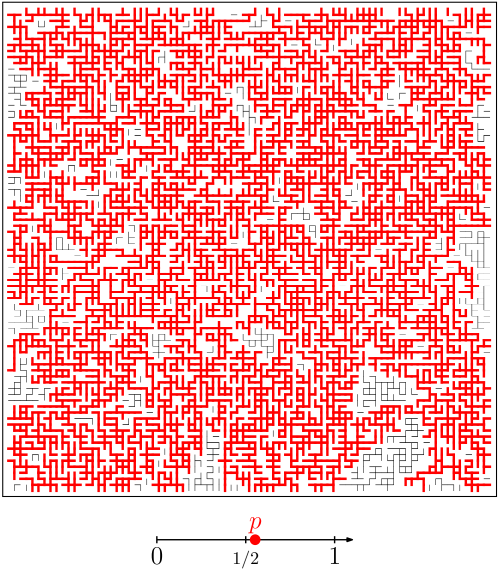
Fließt Wasser von oben nach unten?





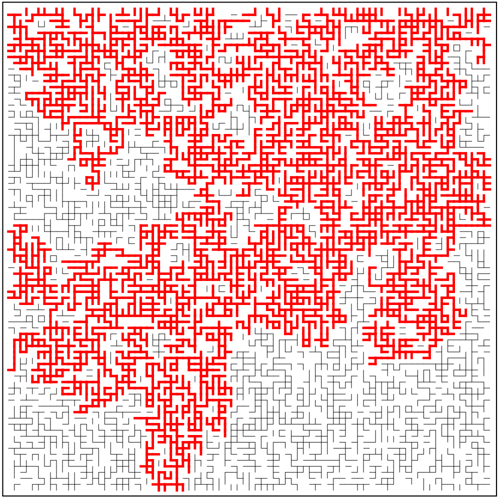
Falls p kleiner als 1/2 ist, gibt es keinen offenen Pfad von oben nach Unten.

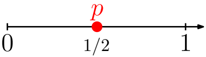
Fließt Wasser von oben nach unten?



Falls p größer als 1/2 ist, dann fließt das Wasser von oben nach unten.

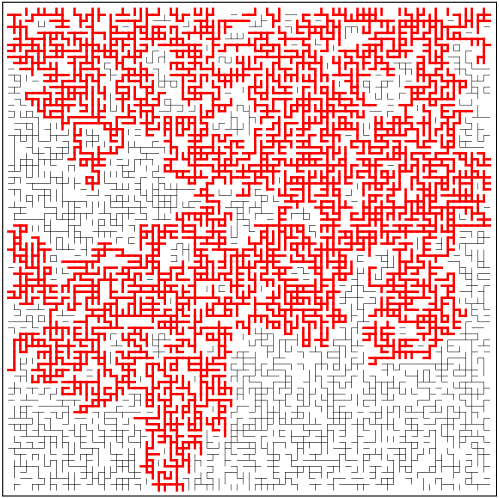
Fließt Wasser von oben nach unten?

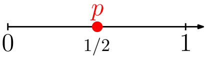




Falls p genau gleich 1/2 ist, haben die Clusters schöne fraktale Strukturen, und die Antwort der Frage ist nicht mehr so klar.

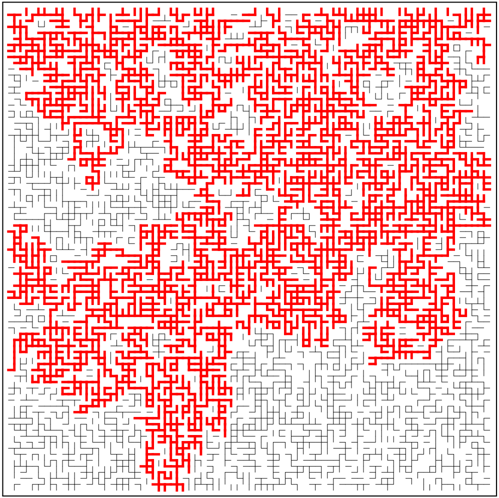
Fließt Wasser von oben nach unten?

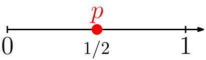




Hier gibt es einen offenen Pfad von oben nach unten, aber dieser ist sehr fragile.

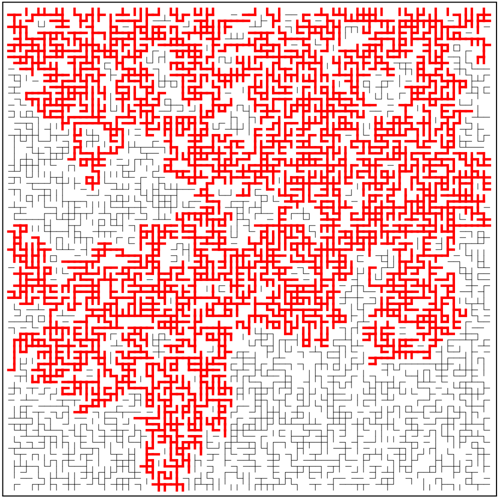
Fließt Wasser von oben nach unten?

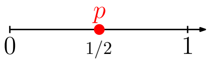




Ein paar offene Kanten weg, und der Pfad ist auch weg!

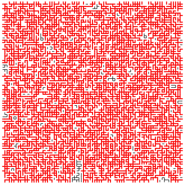
Fließt Wasser von oben nach unten?





Ein paar offene Kanten weg, und der Pfad ist auch weg!

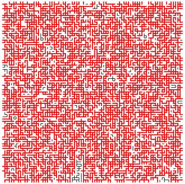
$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

Was wir bei den Simulationen beobachten, wurde 1980 von Kesten rigoros etabliert. Er hat den folgenden Satz bewiesen.

$p < \frac{1}{2}$

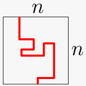


$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

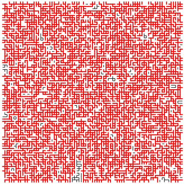
Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir



$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left[\qquad \right] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wir betrachten die Kreuzungswahrscheinlichkeit: das ist die Wahrscheinlichkeit, dass es einen offenen Pfad von oben nach unten in einer n-mal-n-Box existiert.

$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

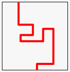
Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big[$$

n

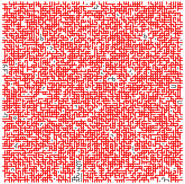


n

$$\Big] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Für p kleiner als $1/2$ konvergiert diese Kreuzungswahrscheinlichkeit gegen 0, wenn die Größe der Box n gegen unendlich geht.

$p < \frac{1}{2}$

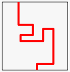


$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

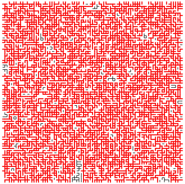
Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir



$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\qquad \right] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wir werden niemals einen offenen Pfad von oben nach unten beobachten, falls $p < 1/2$ und n groß ist.

$p < \frac{1}{2}$

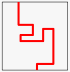


$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

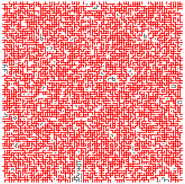
Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big[$ 

$\Big] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$

Für $p > 1/2$ konvergiert die Kreuzungswahrscheinlichkeit gegen 1, wenn die Größe der Box n gegen unendlich geht.

$p < \frac{1}{2}$

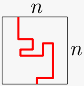


$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

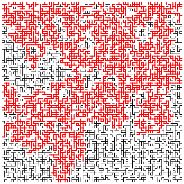
Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir



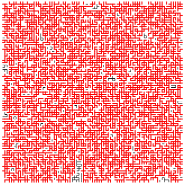
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\quad \right] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wir werden immer einen offenen Pfad von oben nach unten beobachten, wenn p>1/2 und n groß ist.

$p < \frac{1}{2}$



$p = \frac{1}{2}$



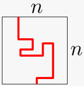
$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

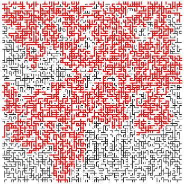
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Bigg[$$



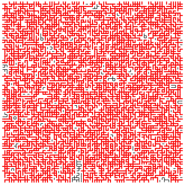
$$\Bigg] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ ?? & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Für p=1/2, erinnern Sie sich, sagte ich, die Antwort sei nicht klar.

$p < \frac{1}{2}$



$p = \frac{1}{2}$

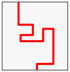


$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

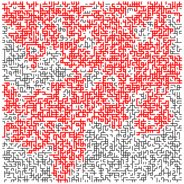
Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}$ []

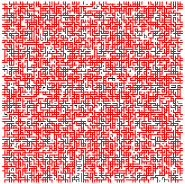
$$= \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ ?? & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Und die Antwort werden Sie haben in der erste Übungsklasse :-D

$p < \frac{1}{2}$



$p = \frac{1}{2}$

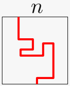


$p > \frac{1}{2}$

Mathematische Antwort auf Frage 1

Theorem [Kesten, 1980]

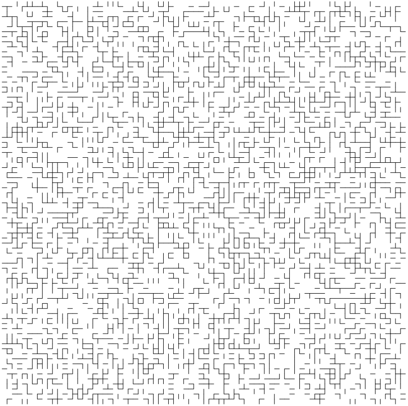
Für die Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big[$ 

$n \Big] = \begin{cases} 0 & \text{if } p < \frac{1}{2} \\ ?? & \text{if } p = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } p > \frac{1}{2} \end{cases}$

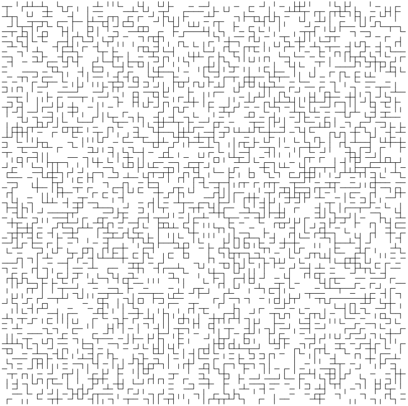
Und die Antwort werden Sie haben in der erste Übungsklasse :-D

Ein unendlicher Wald



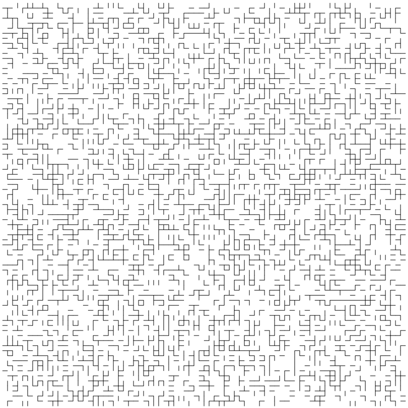
Für Bilder oder Simulationen können wir die Perkolation nur in einem endlichen Kasten darstellen.

Ein unendlicher Wald



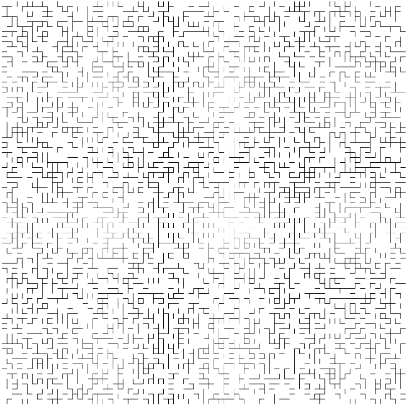
Mathematisch könnten wir uns aber auch eine Perkolation im unendlichen Gitter $\mathbb{Z}^2$ vorstellen.

Ein unendlicher Wald



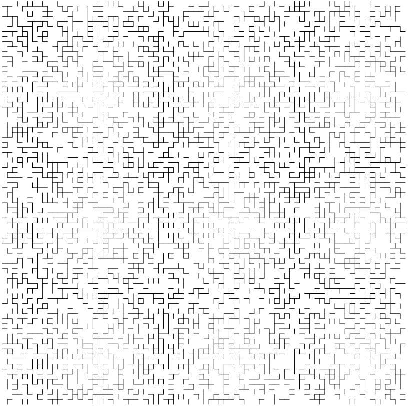
Stellen Sie sich vor, Sie haben einen unendlichen Wald von Bäumen,

Ein unendlicher Wald



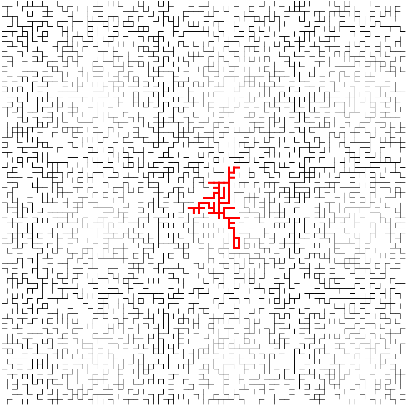
und Sie setzen eine Kante zwischen zwei Bäume,
wenn sich ein Feuer von einem Baum zum anderen ausbreiten würde.

Ein unendlicher Wald



In diesem Fall ist eine natürliche Frage:
Ist es möglich, dass ein Feuer einen unendlichen Teil des Waldes verbrennen würde?

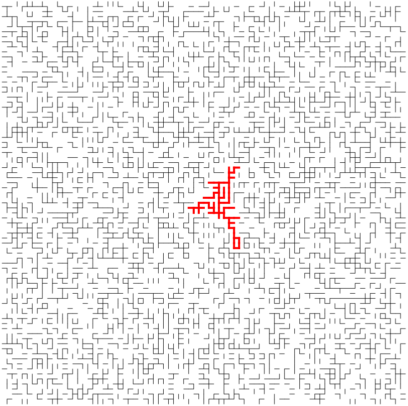
Ein unendlicher Wald



Existiert ein unendliches Cluster?

Mathematisch bedeutet diese Frage: Gibt es einen unendlichen Cluster?

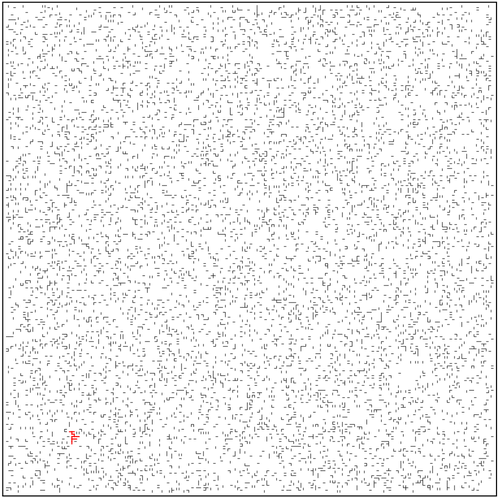
Ein unendlicher Wald

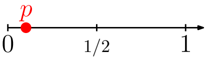


Existiert ein unendliches Cluster?

Mathematisch bedeutet diese Frage: Gibt es einen unendlichen Cluster?

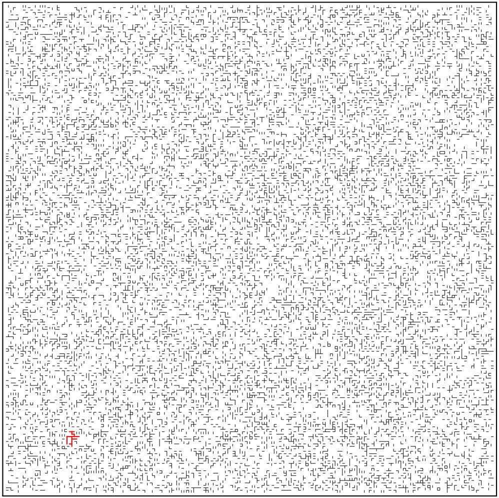
Größte Cluster in eine groß Box

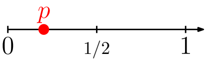




Auch hier hängt die Antwort vom Parameter p ab. Betrachten wir nun den größten Cluster in einer 200-mal-200-Box.

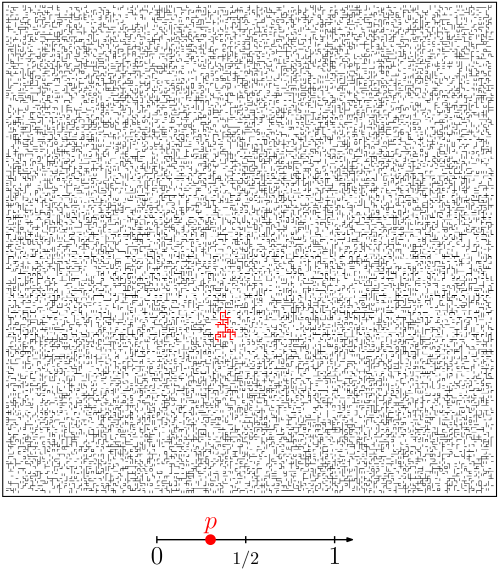
Größte Cluster in eine groß Box





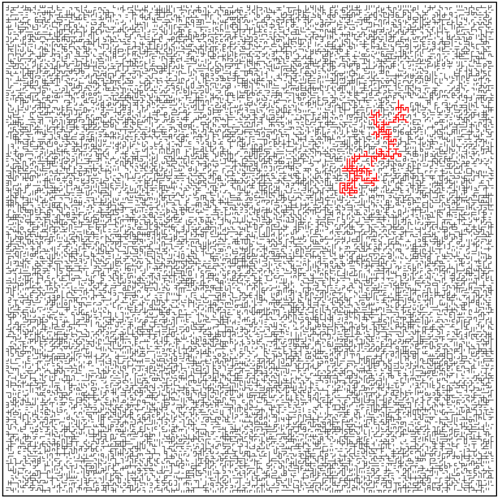
Für $p < 1/2$ sind alle Cluster ziemlich klein.

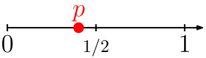
Größte Cluster in eine groß Box



Für $p < 1/2$ sind alle Cluster ziemlich klein.

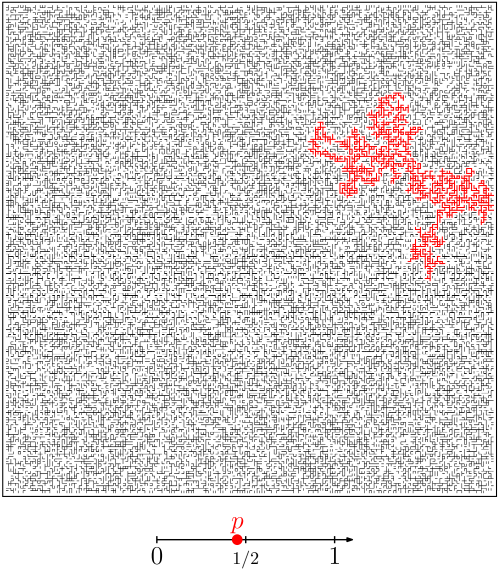
Größte Cluster in eine groß Box





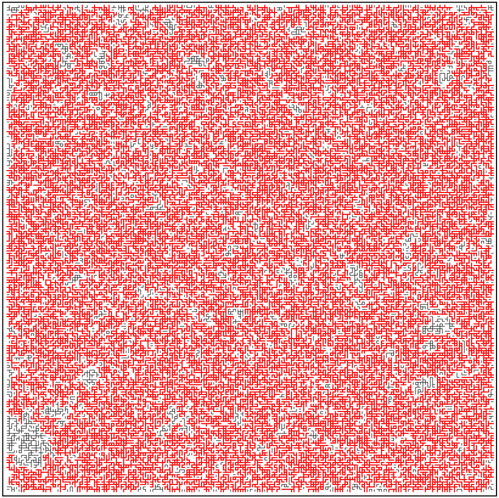
Für $p < 1/2$ sind alle Cluster ziemlich klein.

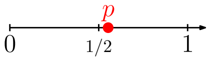
Größte Cluster in eine groß Box



Für $p < 1/2$ sind alle Cluster ziemlich klein.

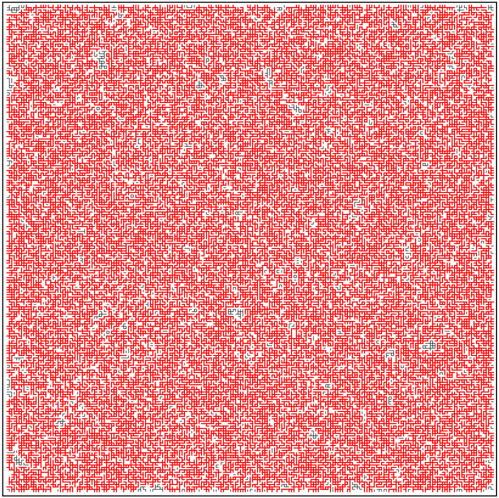
Größte Cluster in eine groß Box

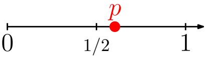




Sobald $p > 1/2$, dann sieht man einen riesigen Cluster. Und eigentlich ist dieser Cluster ein Teil von einem unendlichen Cluster.

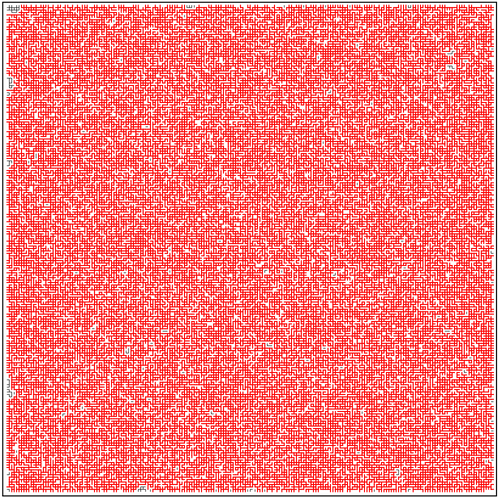
Größte Cluster in eine groß Box

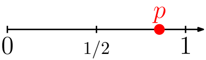




Sobald $p > 1/2$, dann sieht man einen riesigen Cluster. Und eigentlich ist dieser Cluster ein Teil von einem unendlichen Cluster.

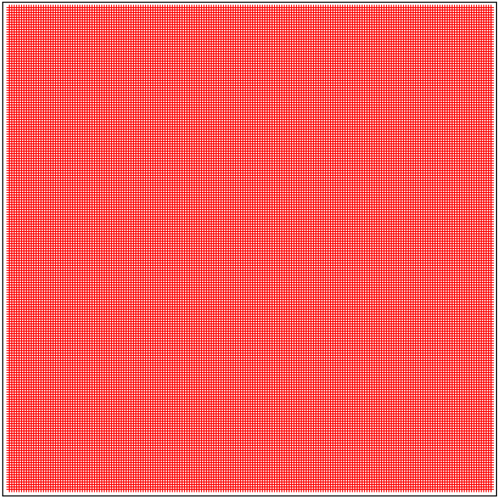
Größte Cluster in eine groß Box

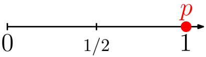




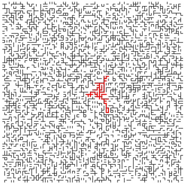
Sobald $p > 1/2$, dann sieht man einen riesigen Cluster. Und eigentlich ist dieser Cluster ein Teil von einem unendlichen Cluster.

Größte Cluster in eine groß Box

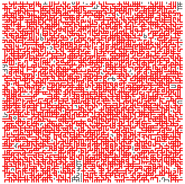




Sobald $p > 1/2$, dann sieht man einen riesigen Cluster. Und eigentlich ist dieser Cluster ein Teil von einem unendlichen Cluster.

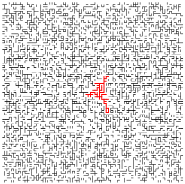


$p < \frac{1}{2}$

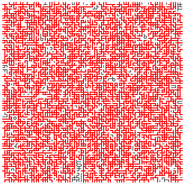


$p > \frac{1}{2}$

Die Mathematische Antwort wurde auch von Kesten gegen. Er hat den folgenden Satz bewiesen.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

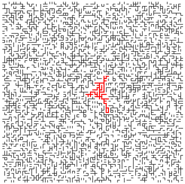
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

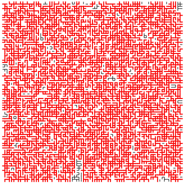
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es einen unendlichen Cluster gibt, ist gleich 0 falls $p < 1/2$,



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

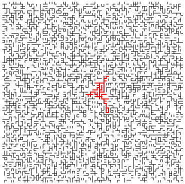
MATHEMATISCHE ANTWORT AUF FRAGE 2

Theorem [Kesten, 1980]

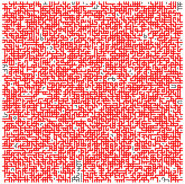
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

und 1 falls $p > 1/2$**.**



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

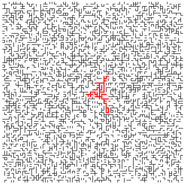
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

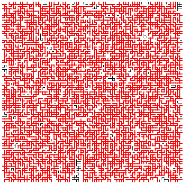
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, & \textbf{[Existiert \textit{nie}]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. & \textbf{[Existert \textit{immer}]} \end{cases}$$

Hier möchte ich etwas betonen: Wir betrachten das Ereignis, dass es einen unendlichen Cluster gibt.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

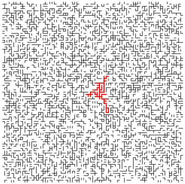
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

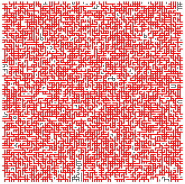
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Dieses Ereignis ist nicht trivial: Es gibt viele mögliche Konfigurationen mit einem unendlichen Cluster und viele Konfigurationen ohne einen unendlichen Cluster.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

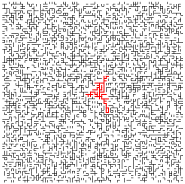
MATHEMATISCHE ANTWORT AUF FRAGE 2

Theorem [Kesten, 1980]

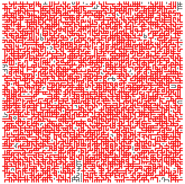
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Trotzdem ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses entweder 0 (für p kleiner als 1/2) oder 1 (für p größer als 1/2).



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

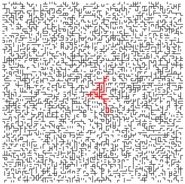
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

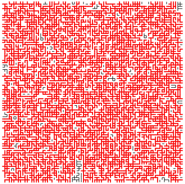
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Ein solches Phänomen, bei dem interessante Ereignisse eine Wahrscheinlichkeit haben, ist nur möglich, weil wir einen Konfigurationsraum haben, der überabzählbar.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

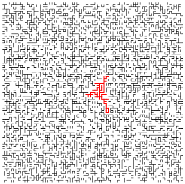
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

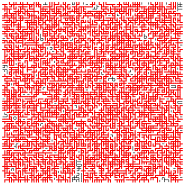
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert \textit{nie}]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert \textit{immer}]} \end{cases}$$

Insbesondere der Phasenübergang der Perkolation ist etwas, das in unendlichem Volumen natürlich vorkommt.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

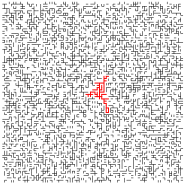
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

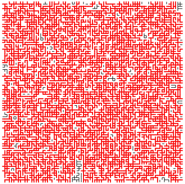
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert \textit{nie}]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert \textit{immer}]} \end{cases}$$

Dieses Phänomen wäre mit diskreter Wahrscheinlichkeit nicht möglich.



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

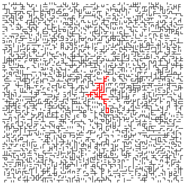
Mathematische Antwort auf Frage 2

Theorem [Kesten, 1980]

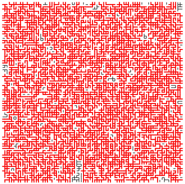
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Dieser Satz sagt nicht, was am p=1/2 passiert. Und die Frage ist:



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

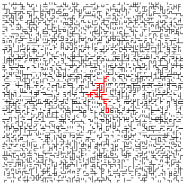
MATHEMATISCHE ANTWORT AUF FRAGE 2

Theorem [Kesten, 1980]

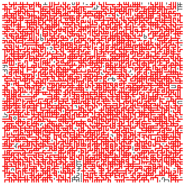
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster oder nicht?



$p < \frac{1}{2}$



$p > \frac{1}{2}$

MATHEMATISCHE ANTWORT AUF FRAGE 2

Theorem [Kesten, 1980]

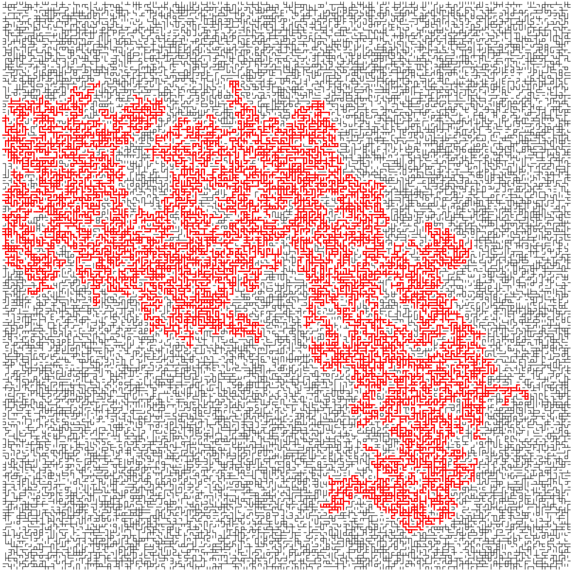
Für Perkolation mit dem Parameter p haben wir

$$\mathbb{P}\left[\exists \text{ unendliches Cluster}\right] = \begin{cases} 0 & \text{falls } p < \frac{1}{2}, \qquad \textbf{[Existiert } \textbf{\textit{nie}}\textbf{]} \\ 1 & \text{falls } p > \frac{1}{2}. \qquad \textbf{[Existert } \textbf{\textit{immer}}\textbf{]} \end{cases}$$

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster oder nicht?

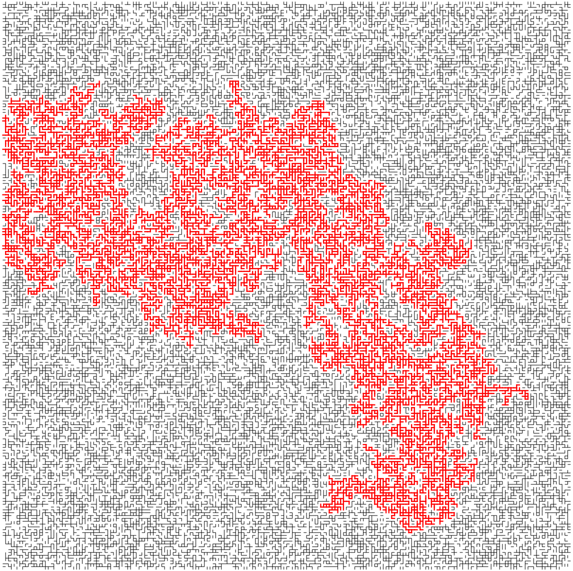
Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



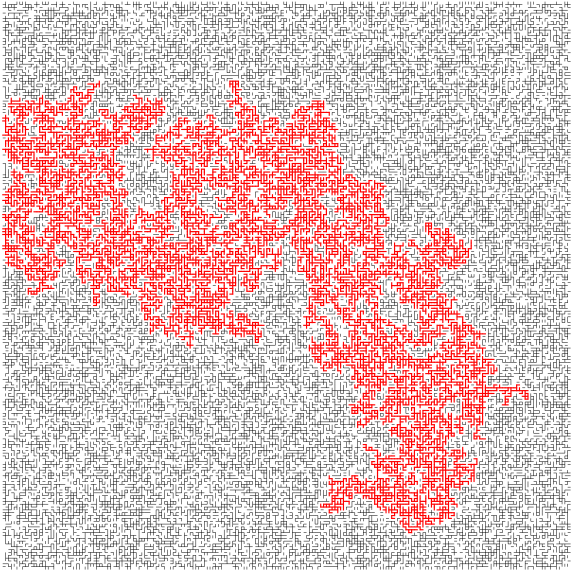
Diese Simulation zeigt den grössten CLuster in einer 200x200 Box.

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



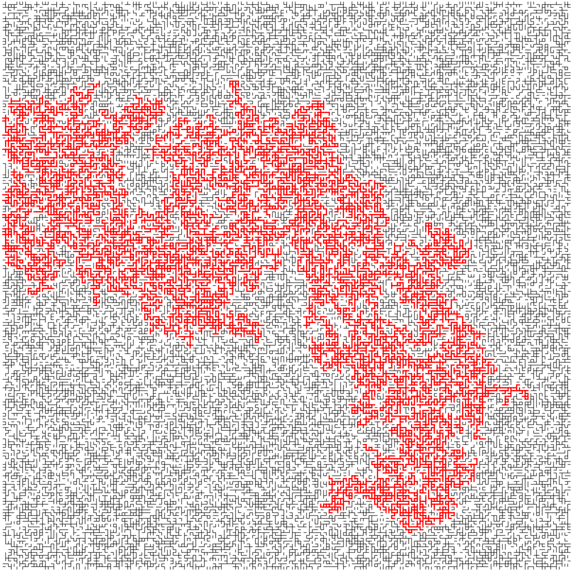
Ist es ein Teil von einem unendlichen oder einem endlichen Cluster in $\mathbb{Z}^2$.

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



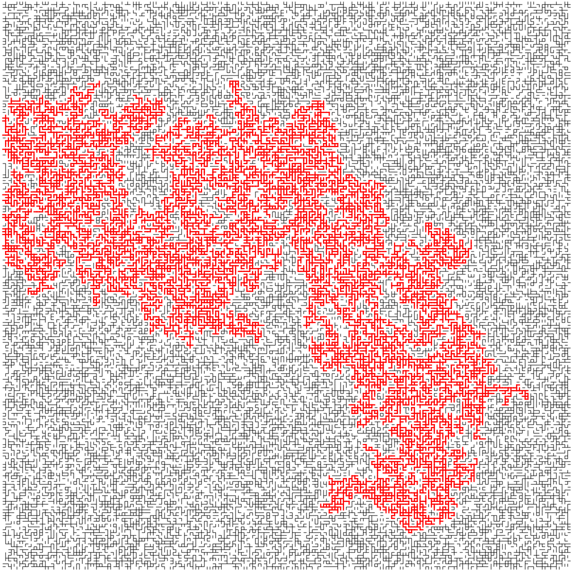
Die Antwort werden sie (Vielleicht?) in der Übungsklasse bekommen!

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



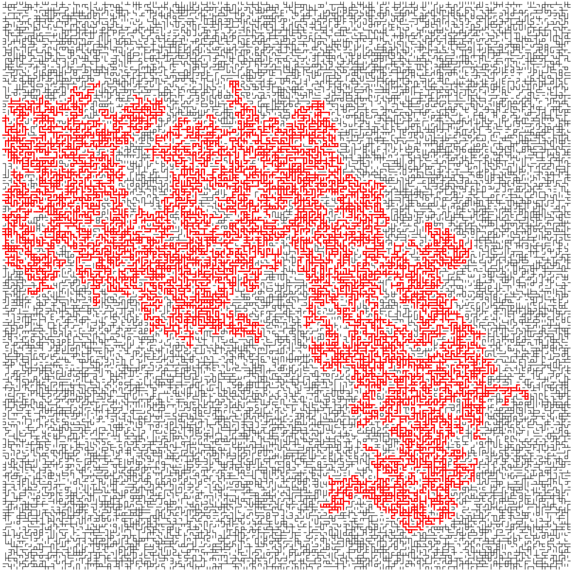
Und eine letzte Bemerkung: die Antwort dieser Frage ist in Dimension 3 nicht bekannt.

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



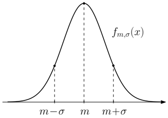
Das ist heute die grösste Herausforderung in Perkolationstheorie!!

Existiert für $p = 1/2$ ein unendlicher Cluster?



Das ist heute die grösste Herausforderung in Perkolationstheorie!!

2. Einführung in die Wahrscheinlichkeit



Was ist Wahrscheinlichkeitstheorie?

Was ist Wahrscheinlichkeitstheorie?

Was ist Wahrscheinlichkeitstheorie?

Ein Ziel

Allgemeine Gesetze etablieren, die das Verhalten mehrerer zufälliger Experimente beschreiben.

Was ist Wahrscheinlichkeitstheorie?

Ein Ziel

Allgemeine Gesetze etablieren, die das Verhalten mehrerer zufälliger Experimente beschreiben.

Gesetz der grossen Zahlen

$$X_i = \begin{cases} 0 & i^{\text{te}} \text{ Wurf ist Kopf,} \\ 1 & i^{\text{te}} \text{ Wurf ist Zahl.} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

➜ **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.
- **Informationstheorie:** Die Wahrscheinlichkeitstheorie kann eine Situation beschreiben, in der man nicht alle Informationen besitzt.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.
- **Informationstheorie:** Die Wahrscheinlichkeitstheorie kann eine Situation beschreiben, in der man nicht alle Informationen besitzt.
- **Randomisierte Algorithmen** in Informatik: Manchmal sind Algorithmen effizienter, wenn man zufällige Entscheidungen erlaubt. Zum Beispiel: Google web search, Ameisen suchen Nahrung.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- ➜ **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- ➜ **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.
- ➜ **Informationstheorie:** Die Wahrscheinlichkeitstheorie kann eine Situation beschreiben, in der man nicht alle Informationen besitzt.
- ➜ **Randomisierte Algorithmen** in Informatik: Manchmal sind Algorithmen effizienter, wenn man zufällige Entscheidungen erlaubt. Zum Beispiel: Google web search, Ameisen suchen Nahrung.
- ➜ **Vereinfachung von komplexen Systemen**. Beispiele: Wassermoleküle in einem Glas, oder Autos auf der Autobahn.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.
- **Informationstheorie:** Die Wahrscheinlichkeitstheorie kann eine Situation beschreiben, in der man nicht alle Informationen besitzt.
- **Randomisierte Algorithmen** in Informatik: Manchmal sind Algorithmen effizienter, wenn man zufällige Entscheidungen erlaubt. Zum Beispiel: Google web search, Ameisen suchen Nahrung.
- **Vereinfachung von komplexen Systemen**. Beispiele: Wassermoleküle in einem Glas, oder Autos auf der Autobahn.
- **Risikotheorie:** Wahrscheinlichkeitstheorie hilft eine rationale Einscheidung zu treffen, wenn man nicht alle Elemente planen kann. Zum Beispiel hilft der SLF Lawinenbericht den Skifahrern, die Lawinengefahr richtig einzuschätzen.

Wofür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich?

- **Zum Beschreiben der Ergebnisse von Zufallsexperimenten:** Münze werfen, Würfel werfen, Ankunft von Kunden in einem Shop, die Entwicklung des Wetters,...
- **Unklarheit ausdrücken:** Wenn eine Maschine etwas ausrechnet, ist das Ergebnis selten exakt. Man kann die Wahrscheinlichkeitstheorie nutzen, um die Unsicherheit zu beschreiben.
- **Informationstheorie:** Die Wahrscheinlichkeitstheorie kann eine Situation beschreiben, in der man nicht alle Informationen besitzt.
- **Randomisierte Algorithmen** in Informatik: Manchmal sind Algorithmen effizienter, wenn man zufällige Entscheidungen erlaubt. Zum Beispiel: Google web search, Ameisen suchen Nahrung.
- **Vereinfachung von komplexen Systemen**. Beispiele: Wassermoleküle in einem Glas, oder Autos auf der Autobahn.
- **Risikotheorie:** Wahrscheinlichkeitstheorie hilft eine rationale Einscheidung zu treffen, wenn man nicht alle Elemente planen kann. Zum Beispiel hilft der SLF Lawinenbericht den Skifahrern, die Lawinengefahr richtig einzuschätzen.
- ...

3. Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

von “Algorithmen und Wahrscheinlichkeit”

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

Grundbegriffe

- **Grundraum:** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ endlich oder abzählbar.
- **Wahrscheinlichkeit:** $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$ sodass,

$$\mathbb{P}[\omega] \in [0,1] \quad \text{und} \quad \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}[\omega] = 1.$$

Beispiel: Würfelwurf:

➜ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

➜ $\mathbb{P}[\omega] = \frac{1}{6}$.

Definition 2.1. Ein *diskreter Wahrscheinlichkeitsraum* ist bestimmt durch eine *Ergebnismenge* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von *Elementarereignissen*. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine *(Elementar-)Wahrscheinlichkeit* $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heisst *Ereignis*. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist definiert durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega].$$

Ist E ein Ereignis, so bezeichnen wir mit $\bar{E} := \Omega \setminus E$ das *Komplementärereignis* zu E.

Ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ heisst *endlicher Wahrscheinlichkeitsraum*. Wir werden uns in diesem Kapitel oft auf endliche Wahrscheinlichkeitsräume beschränken. Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen werden wir gewöhnlich nur den Fall $\Omega = \mathbb{N}_0$ betrachten.

Man kann den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraumes auch auf überabzählbare Mengen wie $\Omega = \mathbb{R}$ erweitern. Hierbei treten jedoch einige zusätzliche Schwierigkeiten auf und wir werden die Behandlung dieses Themas daher auf weiterführende Vorlesungen verschieben. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie für diskrete (endliche oder abzählbar unendliche) Mengen verwendet man oft auch den Begriff (elementare) Stochastik. Auf diese werden wir uns in dieser Vorlesung beschränken.

Aus der Definition 2.1 folgen sofort einige elementare, aber sehr nützliche Konsequenzen.

Lemma 2.2. Für Ereignisse A, B gilt:

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$.
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$.

“Man kann den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraumes auch auf überabzählbare Mengen wie $\Omega = \mathbb{R}$ erweitern. Hierbei treten jedoch einige zusätzliche Schwierigkeiten auf und wir werden die Behandlung dieses Themas daher auf weiterführende Vorlesungen verschieben.”

Ereignisse

Ereignisse

Ein Ereignis ist eine Teilmenge $A \subset \Omega$.

$$\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\omega].$$

Ereignisse

Ereignisse

Ein Ereignis ist eine Teilmenge $A \subset \Omega$.

$$\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\omega].$$

Intuition: Ein Ereignis repräsentiert eine Eigenschaft eines Zufallsexperiments, die man beobachten kann.

Ereignisse

Ereignisse

Ein Ereignis ist eine Teilmenge $A \subset \Omega$.

$$\mathbb{P}[A] := \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\omega].$$

Intuition: Ein Ereignis repräsentiert eine Eigenschaft eines Zufallsexperiments, die man beobachten kann.

Beispiel (Würfel): $A = \{2, 4, 6\}$ ("gerade Augenzahl").

Zufallsvariablen

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Zufallsvariablen

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Intuition : X repräsentiert ein Zufallsnummer.

Zufallsvariablen

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Intuition : X repräsentiert ein Zufallsnummer.

Bemerkung: Die Zufallsvariable ist diskret: Der Wertebereich $W_X = X(\Omega)$ ist endlich oder abzählbar.

Zufallsvariablen

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Intuition : X repräsentiert ein Zufallsnummer.

Bemerkung: Die Zufallsvariable ist diskret: Der Wertebereich $W_X = X(\Omega)$ ist endlich oder abzählbar.

Beispiel: Eine Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter p ist eine Abbildung $X : \Omega \to \{0, 1\}$, mit Dichte

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X = 1] = p.$$

Zufallsvariablen

Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Intuition : X repräsentiert ein Zufallsnummer.

Bemerkung: Die Zufallsvariable ist diskret: Der Wertebereich $W_X = X(\Omega)$ ist endlich oder abzählbar.

Beispiel: Eine Bernoulli Zufallsvariable mit Parameter p ist eine Abbildung $X : \Omega \to \{0, 1\}$, mit Dichte

$$\mathbb{P}[X = 0] = 1 - p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X = 1] = p.$$

Unabhängigkeit

Zwei ZV X und Y sind genau dann unabhängig, falls für alle $(x, y) \in W_X \times W_Y$ gilt

$$\mathbb{P}[X = x, Y = y] = \mathbb{P}[X = x]\mathbb{P}[Y = y].$$

Grenze der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie

Modell für n Münzwürfe

$X_1, \ldots X_n$ unabhängige ZVs.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \{0,1\}^n \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array}$$

Grenze der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie

Modell für n Münzwürfe

$X_1, \ldots X_n$ unabhängige ZVs.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \{0,1\}^n \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array}$$

Ein Modell für unendliche Münzwürfe

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ unendliche Reihe von unabhängigen ZVs.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \omega & \mapsto & (X_i(\omega))_{i\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Grenze der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie

Modell für n Münzwürfe

$X_1, \dots X_n$ unabhängige ZVs.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \{0,1\}^n \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{array}$$

Ein Modell für unendliche Münzwürfe

$X_1, X_2, X_3, \dots$ unendliche Reihe von unabhängigen ZVs.

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \omega & \mapsto & (X_i(\omega))_{i \in \mathbb{N}} \end{array}$$

Problem: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist überabzählbar.
➜ Ω muss überabzählbar sein!

Grenze der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie

Modell für einen zufälligen Punkt in $M_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$

X mit Gleichverteilung in M_n.

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & M_n \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

mit

$$\mathbb{P}[X = \frac{k}{n}] = \frac{1}{n+1}.$$

Grenze der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie

Modell für einen zufälligen Punkt in $M_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$

X mit Gleichverteilung in M_n.

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & M_n \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

mit

$$\mathbb{P}[X = \frac{k}{n}] = \frac{1}{n+1}.$$

Modell für einen zufällige Punkt in $[0,1]$

X mit Gleichverteilung in $[0,1]$.

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & [0,1] \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

mit

$$\mathbb{P}[X = x] = ??.$$

Grenze der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie

Modell für einen zufälligen Punkt in $M_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$

X mit Gleichverteilung in M_n.

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & M_n \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

mit

$$\mathbb{P}[X = \frac{k}{n}] = \frac{1}{n+1}.$$

Modell für einen zufällige Punkt in $[0, 1]$

X mit Gleichverteilung in $[0, 1]$.

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & [0,1] \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

mit

$$\mathbb{P}[X = x] = ??.$$

Problem: $[0, 1]$ ist überabzählbar.
➜ Ω muss überabzählbar sein!

Ziel dieses Kurses

Entwicklung der Wahrscheinlichkeitssprache:

Ziel dieses Kurses

Entwicklung der Wahrscheinlichkeitssprache:

➜ Allgemeine Grundbegriffe mit Ω endlich, abzählbar oder überabzählbar.

Ziel dieses Kurses

Entwicklung der Wahrscheinlichkeitssprache:

- ➜ Allgemeine Grundbegriffe mit Ω endlich, abzählbar oder überabzählbar.
- ➜ Definieren und studieren einer unendlichen Reihe von unabhängigen ZV.

Ziel dieses Kurses

Entwicklung der Wahrscheinlichkeitssprache:

- ➜ Allgemeine Grundbegriffe mit Ω endlich, abzählbar oder überabzählbar.
- ➜ Definieren und studieren einer unendlichen Reihe von unabhängigen ZV.
- ➜ Einführung in stetige ZV. Z.B. Normalverteilung.

Ziel dieses Kurses

Entwicklung der Wahrscheinlichkeitssprache:

- ➜ Allgemeine Grundbegriffe mit Ω endlich, abzählbar oder überabzählbar.
- ➜ Definieren und studieren einer unendlichen Reihe von unabhängigen ZV.
- ➜ Einführung in stetige ZV. Z.B. Normalverteilung.
- ➜ Erwartungswert und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ziel dieses Kurses

Entwicklung der Wahrscheinlichkeitssprache:

- ➜ Allgemeine Grundbegriffe mit Ω endlich, abzählbar oder überabzählbar.
- ➜ Definieren und studieren einer unendlichen Reihe von unabhängigen ZV.
- ➜ Einführung in stetige ZV. Z.B. Normalverteilung.
- ➜ Erwartungswert und Wahrscheinlichkeitsrechnung.
- ➜ Wichtige Wahrscheinlichkeitsgesetze: Gesetz der gossen Zahlen, Zentraler Grenzwertsatz.