Runge-Kutta Verfahren

Ein s-stufiges Runge-Kutta (Einschritt-) Verfahren (RK-ESV) ist definiert durch

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot \sum_{i=1}^{s} b_i \cdot k_i$$

wobei die Stufen / Steigungen

$$k_i = f\left(t_j + c_i \cdot h,\ y_j + h \cdot \sum_{l=1}^{s} a_{il} \cdot k_l\right)$$

sind. Weiter nennt man

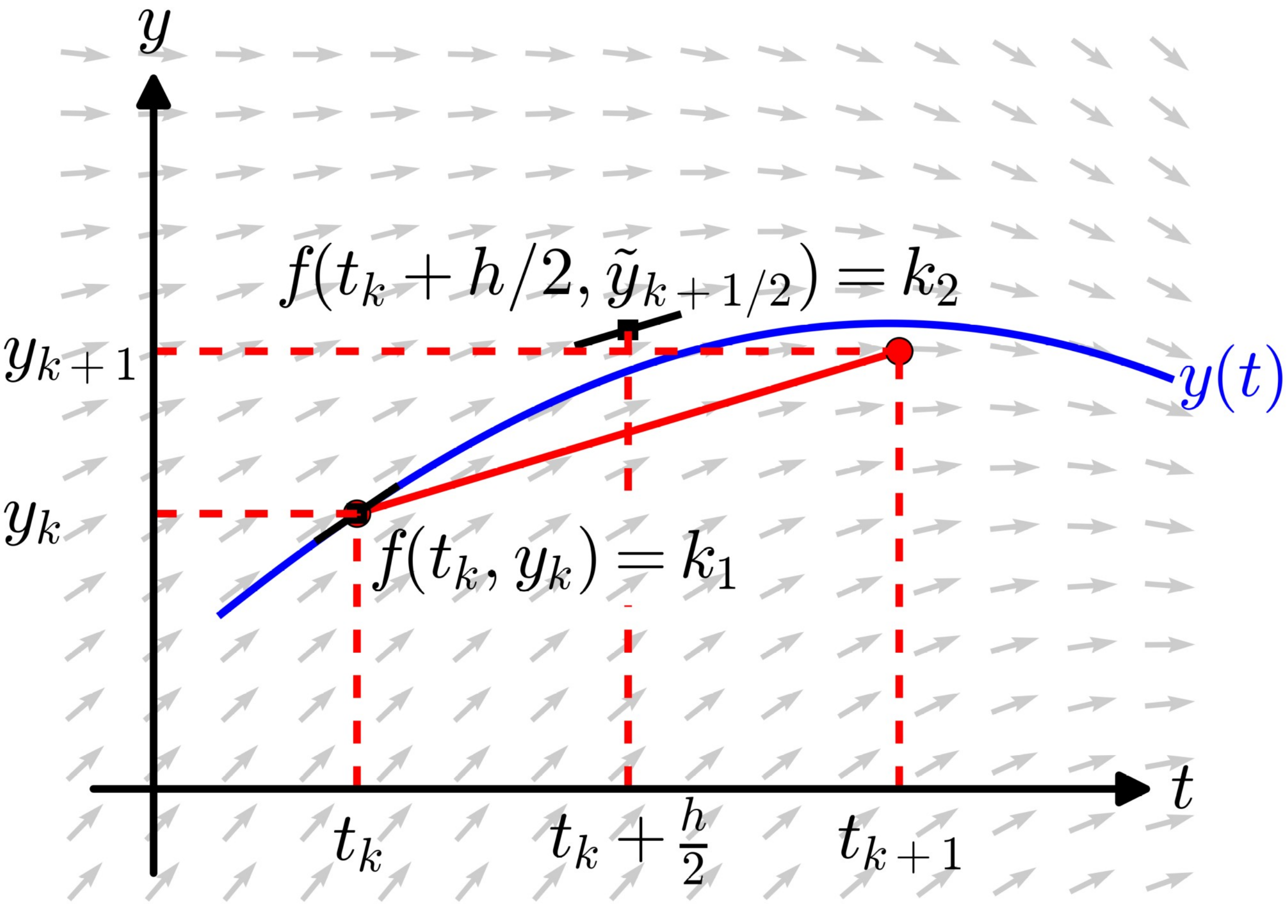
s ... Anzahl Stufen
c_i ... Knoten
b_i ... Gewichte
a_{il} ... Runge-Kutta Matrix / Koeffizienten

RK Verfahren schreibt man am besten in einem sog. Butcher-Tableau (BT)

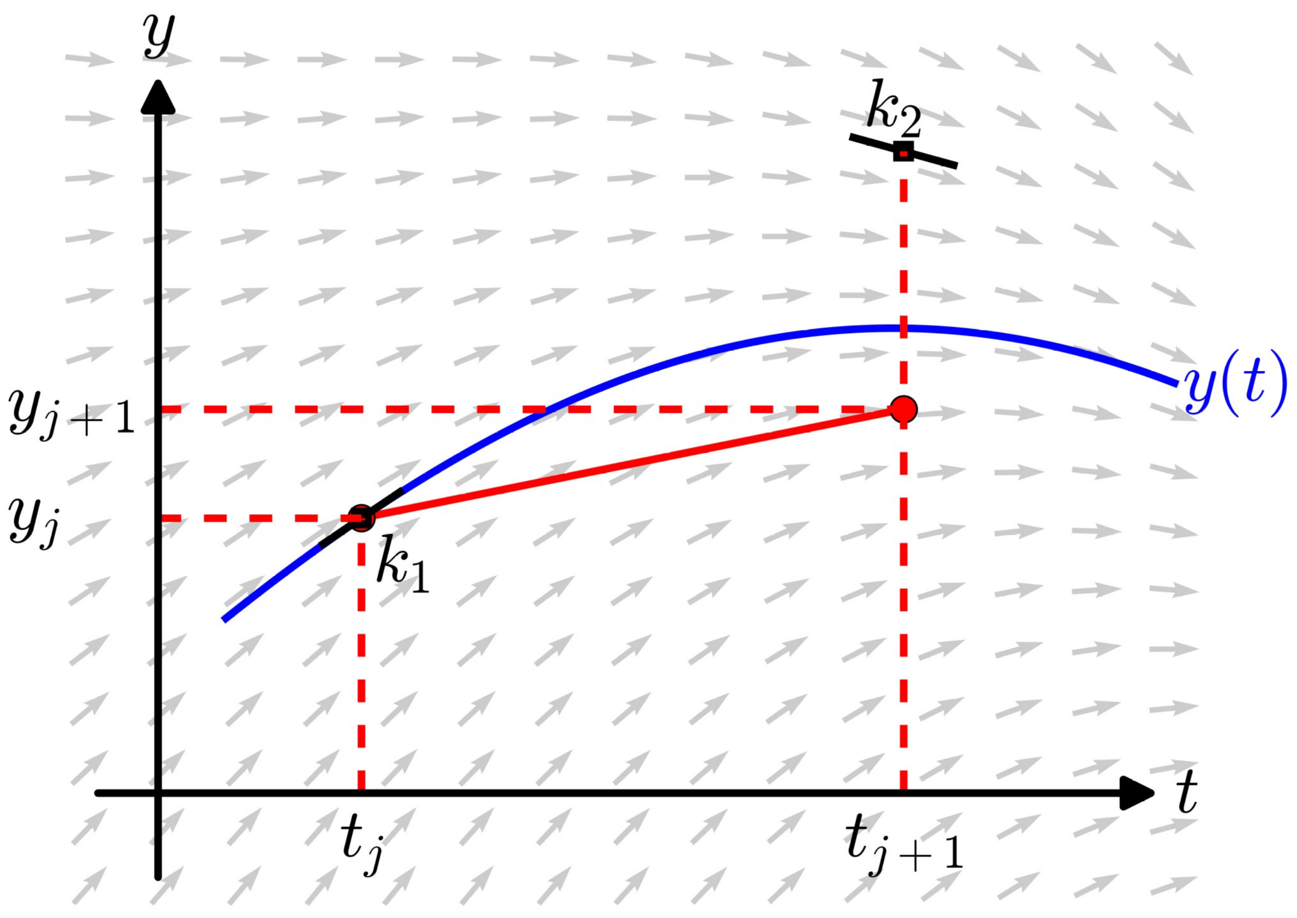
$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & & & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|c} \vec{c} & A \\ \hline & \vec{b}^{\,T} \end{array}$$

transponiert

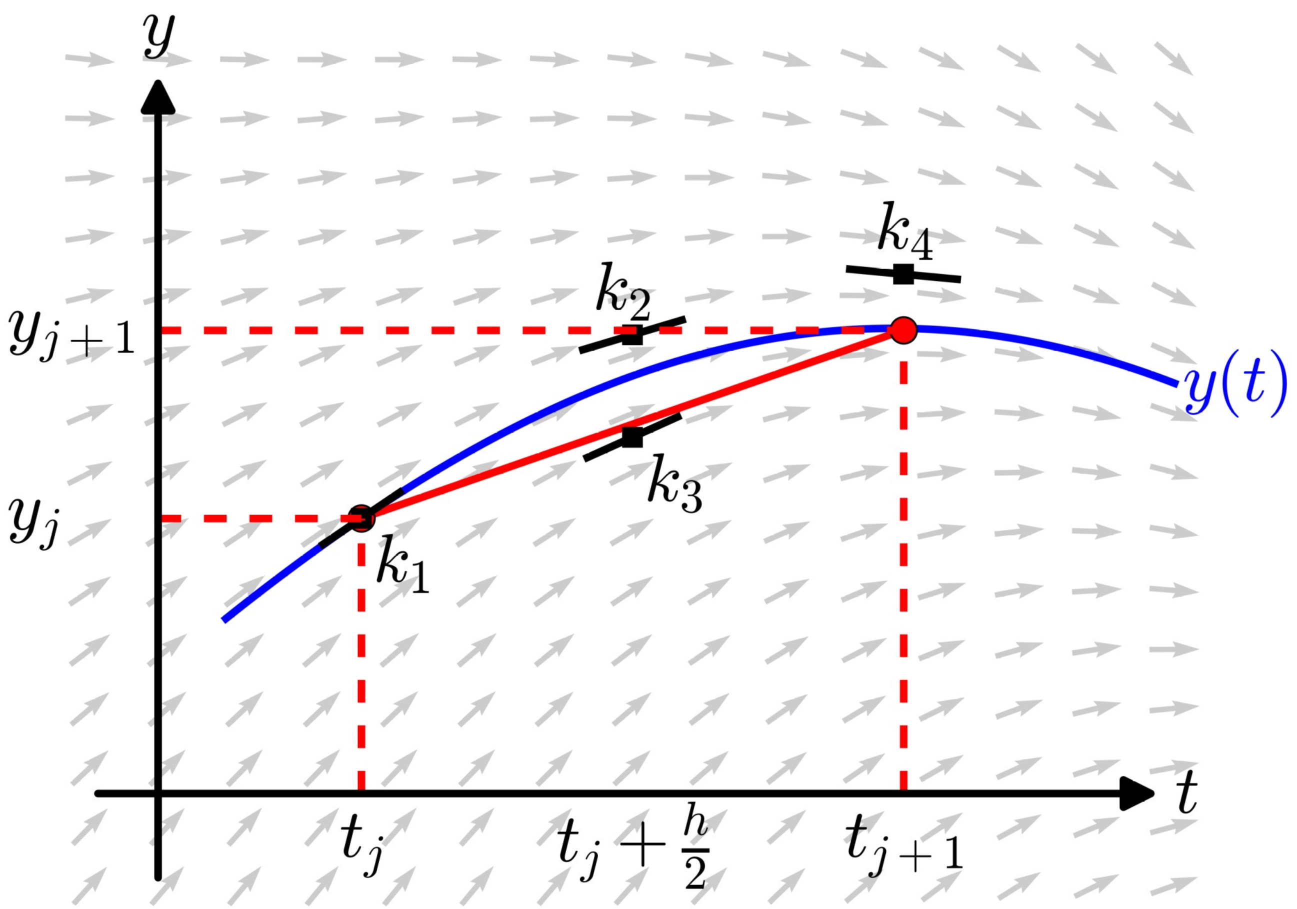
Verbesserter Euler



Heun‘s Methode

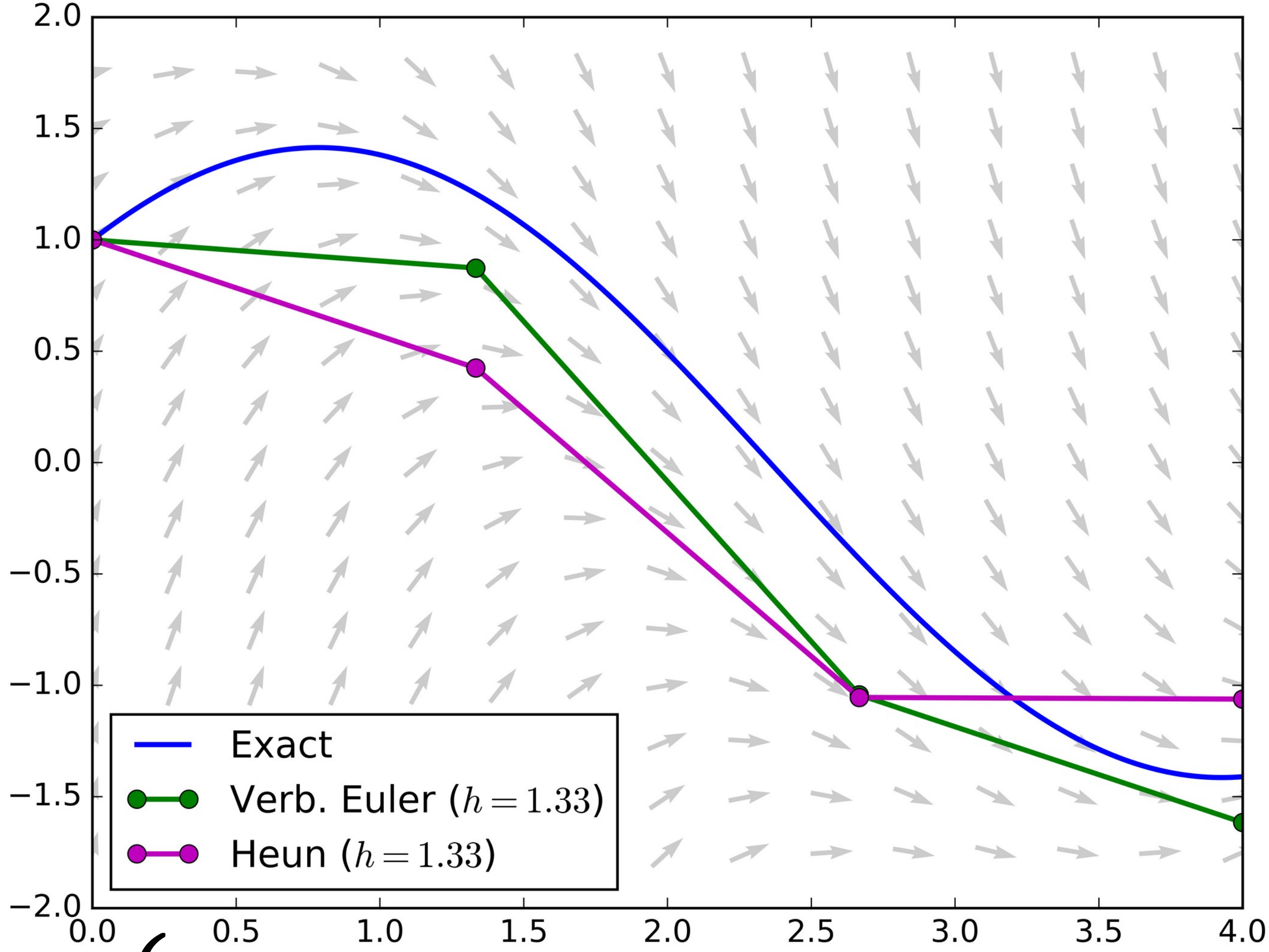


DIE Runge-Kutta Methode



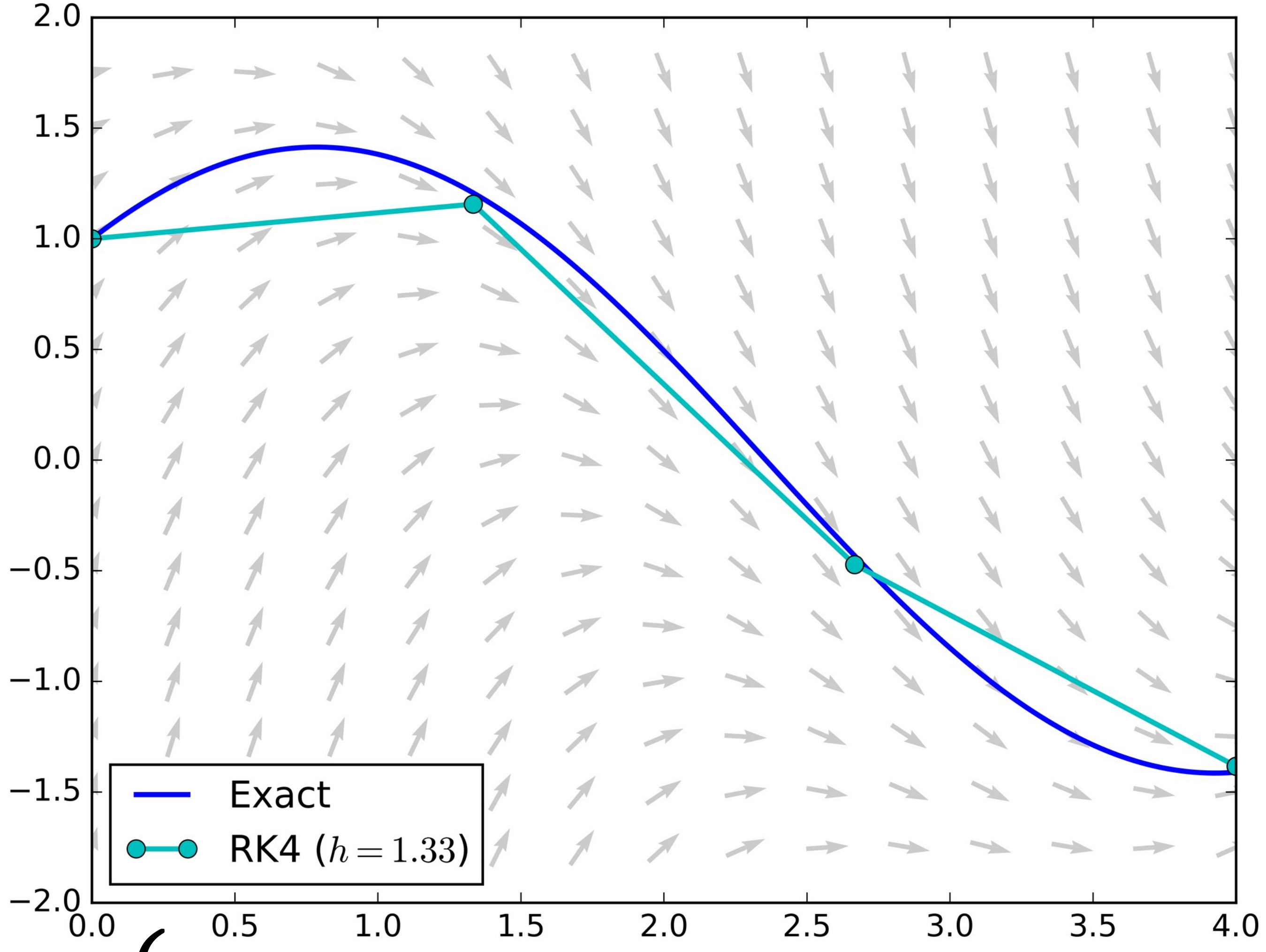
Bsp. (16)

Verb. Euler & Heun



$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = -y(t) + 2\cos(t) \\ y(t_0 = 0) & = 1 \end{cases}$$

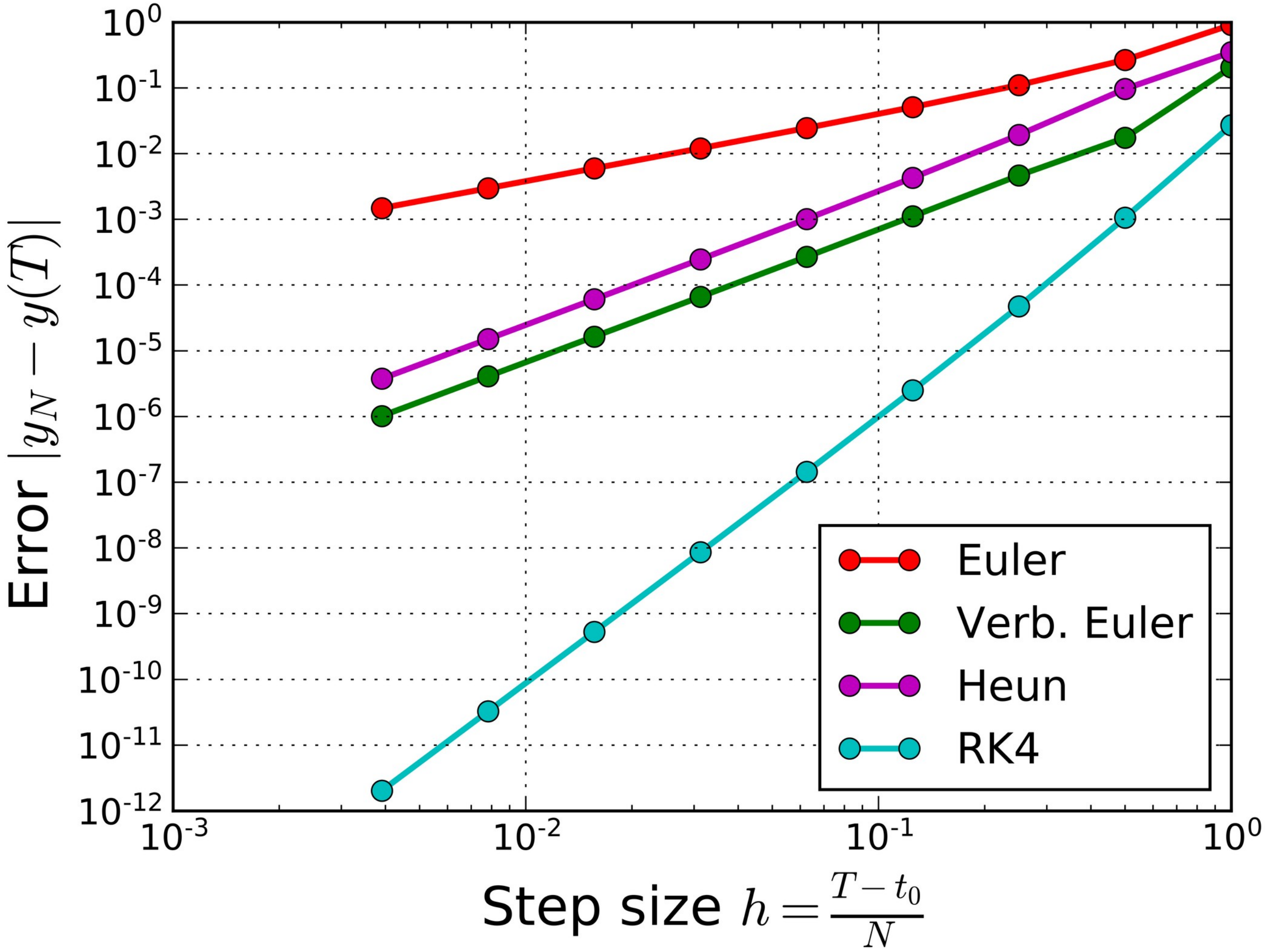
DIE Runge-Kutta Methode



$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = -y(t) + 2\cos(t) \\ y(t_0 = 0) & = 1 \end{cases}$$

Bsp. (16)

Fehler



<u>Satz II.3:</u> Falls die rechte Seite der DGL $\vec{f}(t,\vec{y})$ und die Verfahrens-Funktion $\vec{\phi}(t,\vec{y},t)$ Lipschitz-stetig in $\vec{y}$ sind, dann gilt für das ESV folgende (globale) Fehlerabschätzung

$$\epsilon = \max_{j=0,\dots,N} \|\vec{y}(t_j) - \vec{y}_j\|$$
$$\leq \left(\|\vec{y}(t_0) - \vec{y}_0\| + \sum_{j=1}^{N} \|\vec{e}_j\| \right) \cdot e^{\tilde{L}(t_N - t_0)}$$

AW Fehler

Fehler in jedem Schritt summieren sich schlimmstenfalls

wobei $\tilde{L}$ die Lipschitz-Konstante der Verfahrens-Funktion $\vec{\phi}$ ist.