

### III. Adaptive Schrittweitensteuerung

Ziel: Eine gewünschte Genauigkeit erreichen mit möglichst wenig (Rechen-) Aufwand (Effizienz!)  $\rightarrow$  adaptive Schrittweite  $h \rightarrow h_j$

- Fehlerabschätzungen & Toleranzen (abs., rel.)
- Schrittweithalbierung & Eingebettete RK-Verfahren
- Adaptive Schrittweitensteuerung

Wozu: Praxis relevant!

#### III.1 Fehlerbetrachtungen und Toleranzen

Gegeben ein skalares AWP  $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$  *der Einfachheit halber!*

$$y(t_0) = y_0$$

für  $t \in [t_0, T]$ .

Wir wollen dieses AWP näherungsweise bis auf eine Genauigkeit/Toleranz mit möglichst wenigen IntegrationsSchritten lösen

$$E = \max_{j=0, \dots, N} | \underbrace{y(t_j)}_{\text{exakt}} - \underbrace{y_j}_{\text{approx. Lösung}} | < \text{TOL}$$

Dieses Problem ist nicht mehr ganz so "einfach" zu behandeln wie bei der Quadratur weil gemachte Fehler sich verstärken können...

Satz II.3 gibt uns die Abschätzung

$$\epsilon \leq \left( \underbrace{|y(t_0) - y_0|}_{\text{Fehler in AW}} + \sum_{j=1}^N \underbrace{|e_j|}_{\text{LDF}} \right) \cdot \underbrace{e^{\tilde{\Sigma}(T-t_0)}}_{\text{"vernachlässigen"}} < \text{TOL}$$

Also

$$\sum_{j=1}^N |e_j| < \text{TOL}$$

$$|e_1| + \dots + |e_j| + \dots + |e_N| < \text{TOL}$$

Idee: Wähle  $|e_j| < \epsilon_{\text{ol}}$  ← lokal

↗ global

$$\text{Damit } \sum_{j=1}^N |e_j| = N \cdot \epsilon_{\text{ol}} < \text{TOL}$$

↑  
?

Problem: Wir kennen die Anzahl Schritte  $N$  nicht im Voraus!

Bei äquidistenter Schrittweite gilt

$$h = \frac{T-t_0}{N} \rightsquigarrow N = \frac{T-t_0}{h}$$

Damit liegt nahe

$$\frac{T-t_0}{h_j} \cdot \text{tol}_j \approx \text{TOL}$$

Schrittweite  
im j-ten Schritt


$$\text{tol}_j \approx h_j \cdot \frac{\text{TOL}}{T-t_0}$$

Also wähle  $h_j$  so, dass

$$|e_j| \leq \text{tol}_j \quad (\text{TKA})$$

Soweit so gut, aber es stellt sich dennoch die Frage ob die Vernachlässigung des exponentiellen Faktors eine gute Idee war...

11.04.21

I.A. NEIN! 

D.h. es ist i.A. schwierig (bzw. unmöglich) von den LDF<sub>n</sub> auf die CDF<sub>n</sub> zu schliessen

4

Deshalb könnte man auch einfach nur die lokalen Fehler mit lokalen Toleranzen kontrollieren, z.B.

$$|e_j| \lesssim atol \quad (\text{absolut}) \quad (TK2)$$

$$|e_j| \lesssim |y_{j-1}| \cdot rtol \quad (\text{relativ}) \quad (TK3)$$

$$|e_j| \lesssim atol + |y_{j-1}| \cdot rtol \quad (\text{abs. + rel.}) \quad (TK4)$$

Bem.: Es gibt keine Garantie, dass die Näherungslösung die gewünschte Genauigkeit hat!

In der Praxis liefert die adaptive Schrittweitensteuerung häufig dennoch gute Resultate.

## III.2 Lokale Fehlerschätzer

Nun müssen wir die LDF  $e_j$  lokal schätzen. Für diese haben wir die a priori Fehlerschätzer (s. II.4)

$$\begin{aligned} |e_j| &= |y(t_j) - y(t_{j-1}) - h_j \cdot \phi(t_{j-1}, y(t_{j-1}), h_j)| \\ &= \mathcal{O}(h_j^{p+1}) = C \cdot h_j^{p+1} \end{aligned}$$

Für ein ESV der KO  $p$ .

In der Konstanten  $C$  stecken höhere Ableitungen der (uns unbekannt!) Lösung. Deshalb, wie schon bei der adaptiven Quadratur, sind diese a priori Fehlerschätzer nicht direkt brauchbar.

Idee: Vergleiche das Resultat eines Verfahrens mit dem Resultat eines genaueren Verfahrens (sog. Kontroll-Verfahren (KV))

Wie bei der adaptiven Quadratur überlegt man sich folgende Möglichkeiten.

### III.2.1 Schrittweitenhalbierung

Gegeben ein Verfahren der KO  $p$ , berechne im  $j$ -ten Schritt ein Schritt mit Schrittweite  $h$

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot \phi(t_j, y_j, h)$$

und 2 Schritte mit halber Schrittweite  $\frac{h}{2}$  (KV)

Hut / Für KV!

$$\hat{y}_{j+1/2} = y_j + \frac{h}{2} \cdot \phi(t_j, y_j, h/2)$$

$$\hat{y}_{j+1} = \hat{y}_{j+1/2} + \frac{h}{2} \phi(t_{j+1/2}, \hat{y}_{j+1/2}, h/2)$$

$t_j + h/2$

Der LDF ist dann

$$|e_{j+1}| = |y(t_{j+1}) - y_{j+1}| = C \cdot h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

und

Lösung mit AK  $y_j$        $\sim$  Satz II.3

$$|\hat{e}_{j+1}| = |y(t_{j+1}) - \hat{y}_{j+1}| = 2 \cdot C \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

$$= \frac{1}{2^p} C \cdot h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2})$$

$$= \frac{|e_{j+1}|}{2^p}$$

Nun wollen wir  $|e_{j+1}|$  und  $|\hat{e}_{j+1}|$  in Verbindung mit der Differenz der Resultate  $|\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}|$  bringen:

$$|e_{j+1}| = \left| y(t_{j+1}) - \hat{y}_{j+1} + \hat{y}_{j+1} - y_{j+1} \right|$$

+ 0 Trick  
 $\Delta$ -U.G.  
 $\leq \underbrace{|y(t_{j+1}) - \hat{y}_{j+1}|}_{\frac{|e_{j+1}|}{2^p}} + |\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}|$

Auflösen nach  $|e_{j+1}|$

$$\rightsquigarrow |e_{j+1}| \approx \frac{2^p}{2^p - 1} |\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}| = \epsilon_{j+1}$$

und **Schätzungen!**

$$|\hat{e}_{j+1}| \approx \frac{1}{2^p - 1} |\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}| = \hat{\epsilon}_{j+1}$$

Dies sind dann wieder sog. a posteriori Fehlerschätzer.

- Bsp.: (1) Euler mit  $h$  + Euler mit  $h/2$   
 (2) Heun  $\rightsquigarrow$  + Heun  $\rightsquigarrow$

### III.2.2 Eingebettete RK-Verfahren

Der Fehler wird geschätzt durch Vergleich eines Verfahrens der  $KO$   $p$  mit einem Verfahren höherer  $KO$ , z.B.  $p+1$ , (das  $KV$ ).

Um dies effizient zu berechnen, (d.h. mit möglichst wenigen Auswertungen der rechten Seite  $f$ ) verwendet man sog. eingebettete RK-Verfahren mit Butcher-Tableaux der Form

$c_1$						
$c_2$	$a_{21}$					
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
$c_s$	$a_{s1}$	$a_{s2}$	$\dots$	$a_{s,s-1}$		
	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_{s-1}$	$b_s$	
	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\dots$	$\hat{b}_{s-1}$	$\hat{b}_s$	← $KV$

Bsp.: (3) Euler + Heun Verfahren

$0$				
$1$	$1$			
	$1$	$0$		← Euler
	$1/2$	$1/2$		← Heun

(4) Dormand und Prince Verfahren (MATLAB ode45)



Der a posteriori Fehlerschätzer ist dann

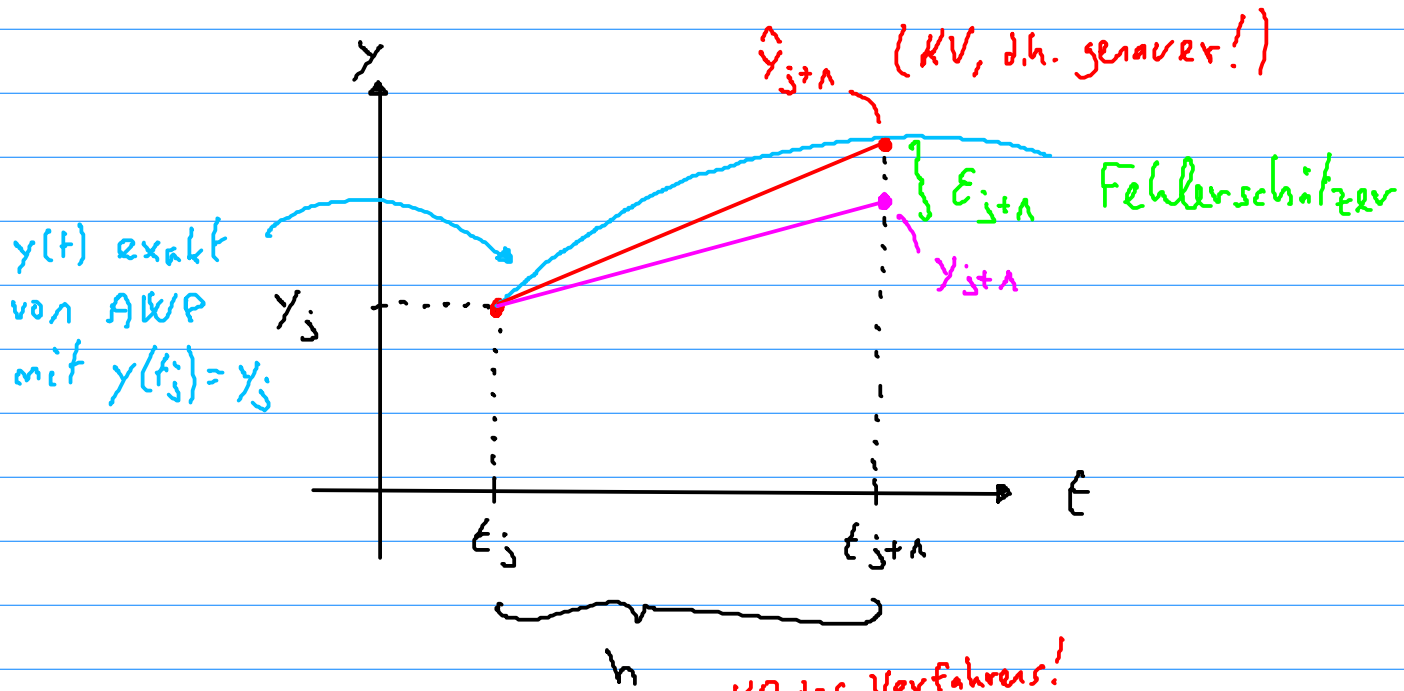
$$|e_{j+1}| \approx |\hat{y}_{j+1} - y_{j+1}| = \varepsilon_{j+1}$$

Bem.: Hier haben wir nur ein Fehlerschätzer  
für das weniger genaue Verfahren  
(D.h. kein Schätzer für  $\hat{\varepsilon}_{j+1}$  des KVs!)

### III.3 Adaptive Schrittweitensteuerung

Ziel: Wähle Schrittweite klein genug um gewünschte lokale Präzision zu erreichen und gross genug um effizient zu sein

Ausgangslage im  $j$ -ten Schritt



$$\text{Haben: } E_{j+1} \approx C \cdot h^{p+1} \quad \Rightarrow \quad C \approx \frac{E_{j+1}}{h^{p+1}}$$

$$\text{Wollen: } E_{\text{tol}_{j+1}} \approx C \cdot H^{p+1} \quad \Rightarrow \quad H \approx h \cdot \left( \frac{E_{\text{tol}_{j+1}}}{E_{j+1}} \right)^{1/(p+1)}$$

$H$  ist ein Schrittweiten-Vorschlag um

$$\varepsilon_{j+1} \approx \varepsilon_{ol_{j+1}}$$

zu erreichen.

Frage: ① Wenn  $\varepsilon_{j+1} > \varepsilon_{ol_{j+1}}$ , ist

$H < h$  Die Schrittweite muss  
verkleinert werden  
da  $\varepsilon_{j+1}$  grösser wie  
gewünschte  $\varepsilon_{ol_{j+1}}$ !

② Wenn  $\varepsilon_{j+1} < \varepsilon_{ol_{j+1}}$  ?  $H > h$

Daraus überlest man sich folgende adaptive  
Schrittweiten-Wahl

$$H = h \cdot \min \left( \text{facmax}, \max \left( \text{facmin}, \text{fac} \cdot \left( \frac{\varepsilon_{ol}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p+1}} \right) \right)$$

↑
↑
↓

begrenzte Vergrößerung
begrenzte Verkleinerung
"Sicherheits"-Faktor

# Adaptive Schrittweitensteuerung (~MATLAB Pseudo-Code)

Function  $[t, y] = \text{adapt\_ode}(\dots)$

$$j = 0$$

$$h = h_0$$

$$t_{\text{ol}} = a_{\text{tol}} + |y_0| \cdot r_{\text{tol}}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{ol}}$$

while  $(t_j < \tau)$

$$h = h \cdot \min \left( \text{fac}_{\text{max}}, \max \left( \text{fac}_{\text{min}}, \text{fac} \cdot \left( \frac{t_{\text{ol}}}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p+1}} \right) \right)$$

Parameter

(\*Details zu h mo Übung)

$$y_{j+1} = y_j + \dots$$

$$\hat{y}_{j+1} = y_j + \dots$$

$$\varepsilon = |y_{j+1} - \hat{y}_{j+1}| \quad \text{oder} \quad \hat{\varepsilon} = \dots$$

mit h-Halb.-  
Methode

$$t_{\text{ol}} = a_{\text{tol}} + \max(|y_j|, |\hat{y}_{j+1}|) \cdot r_{\text{tol}} \quad (\text{TKS})$$

if  $(\varepsilon < t_{\text{ol}})$

$$t_{j+1} = t_j + h$$

$$y_{j+1} = \hat{y}_{j+1}$$

$$j = j + 1$$

end

end

← Nehmen das KV!

(TKA...4  
auch  
möglich)

Bem.: (i) Es wird stets das genauere Resultat  $\hat{y}_{j+1}$  genommen. Obwohl man im Fall eines eingebetteten RK-Verfahrens eigentlich keinen Fehlerschätzer  $\hat{E}_{j+1}$  hat.

(ii) Es gibt keine Garantie, dass der globale Fehler  $E < \text{tol}$  ist !

25.04.22