

# IV. Das Newton Verfahren

Ziele: - nichtlineare Gleichungen numerisch lösen  
- einsehen, dass es schwierig sein kann

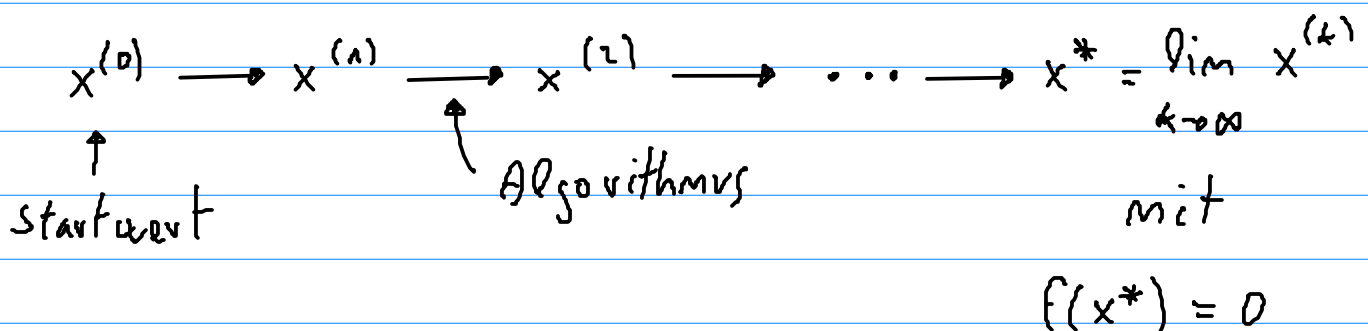
Wozu: - in der Praxis auftretende nichtlineare Gleichungen sind i.A. nicht analytisch lösbar

- Implizite RK-Verfahren für steife Probleme (no Kap. V)

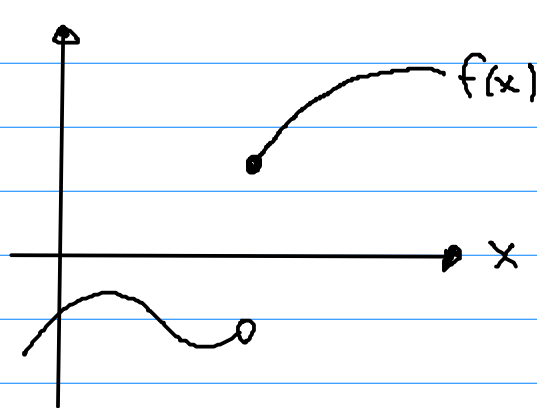
## IV.1 Skalare nichtlineare Gleichungen

Problem: Löse  $f(x) = 0$  für  $f: D=[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

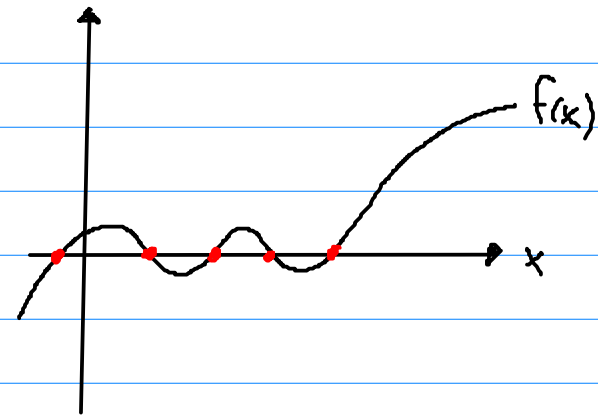
↪ Iterative Verfahren



Bem.: I.A. weder Existenz noch Eindeutigkeit



$f$  nicht stetig



mehrere Lösungen

Im folgenden nehmen wir an, dass  $f$  stetig ist.

### IV.1.1 Fixpunktiterationen und Grundlagen

Das Problem  $f(x) = 0$  kann umgeschrieben werden zu einem sogenannten Fixpunktproblem (FPP)

$$x = \phi(x).$$

$\phi$  heisst Fixpunktfunktion und ein  $x^*$  welches das FPP löst, d.h.  $x^* = \phi(x^*)$ , heisst Fixpunkt (FP).

Ein FPP nennt man konsistent mit dem Nullstellenproblem falls gilt:

$$f(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \phi(x^*)$$

Def.: Ein Verfahren der Form

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), \quad k=0,1,2,\dots$$

heißt fixpunktiteration (FPI).

Bsp.: (1) Löse  $f(x) = x \cdot e^x - 1 = 0$

$$(i) \quad x \cdot e^x - 1 = 0$$

$$x \cdot e^x = 1$$

$$x = e^{-x} = \phi_1(x) \quad \text{FPP} \\ \text{(konsistent ✓)}$$

$$(ii) \quad x = \phi_2(x) \quad \text{mit} \quad \phi_2(x) = \frac{x^2 \cdot e^x + 1}{e^x (1+x)}$$

$$(iii) \quad x = \phi_3(x) \quad \text{mit} \quad \phi_3(x) = x + 1 - x \cdot e^x$$

→ Slides

Bem.: (i) FPI nicht eindeutig

(ii) FPI können divergieren

(iii) Falls sie konvergieren, können sie dies verschieden schnell

Um die Geschwindigkeit der Konvergenz zu charakterisieren, definieren wir

Def.: Eine konvergente Folge  $x^{(k)}$  mit Grenzwert  $x^*$  hat die Konvergenzordnung  $p$ , falls es eine Konstante  $C$  gibt mit

$$|x^{(k+1)} - x^*| \leq C \cdot |x^{(k)} - x^*|^p$$

für alle genügend grosse  $k$ .

Die Konstante  $C$  nennt man Konvergenzrate.

Für  $p=1$  muss  $0 < C < 1$ .

Insbesondere, Konvergenzordnung  $p = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$  nennt man  $\left\{ \begin{array}{l} \text{linear} \\ \text{quadratisch} \end{array} \right\}$ .

5

Bem.: für hinreichende Bedingungen zur Konvergenz einer FPI gibt es den Banach'schen Fixpunktsatz (→ Analysis, Numerik Bücher)  
(Leider oft in der Praxis nicht direkt anwendbar...)

Häufig ist es hilfreich, z.B. um ein Programm zu verifizieren, die Konstanten  $C$  und  $p$  in numerischen Experimenten zu messen.

Dazu definiert man den Fehler in der  $k$ -ten Iteration

$$E^{(k)} = |x^{(k)} - x^*|$$

Dam können wir schreiben

$$E^{(k)} = C \cdot (E^{(k-1)})^p$$

$$E^{(k+1)} = C \cdot (E^{(k)})^p$$

(log nehmen...)

6

Dies kann man einfach für  $C$  &  $p$  lösen zu

$$p = \frac{\log(\varepsilon^{(k+1)}) - \log(\varepsilon^{(k)})}{\log(\varepsilon^{(k)}) - \log(\varepsilon^{(k-1)})}$$

$$C = \frac{\varepsilon^{(k+1)}}{(\varepsilon^{(k)})^p} = \frac{\varepsilon^{(k)}}{(\varepsilon^{(k-1)})^p}$$

Bsp.: (2)  $C$  &  $p$  für Bsp. (1) → slides

Problem: Wie  $\varepsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*|$  berechnen?  
↑  
?

Dies bringt uns zur praktischen Frage:

Wann bricht man die Iteration ab?

Mögliche Abbruchkriterien (ABK):

(i)  $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq \text{atol}$  (ABK1)

(ii)  $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq r \cdot \text{tol} \cdot |x^{(k)}|$  (ABK2)

(iii)  $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leq \text{atol} + r \cdot \text{tol} \cdot |x^{(k)}|$  (ABK3)

(iv)  $|f(x^{(k)})| \leq f \cdot \text{tol}$  (ABK4)

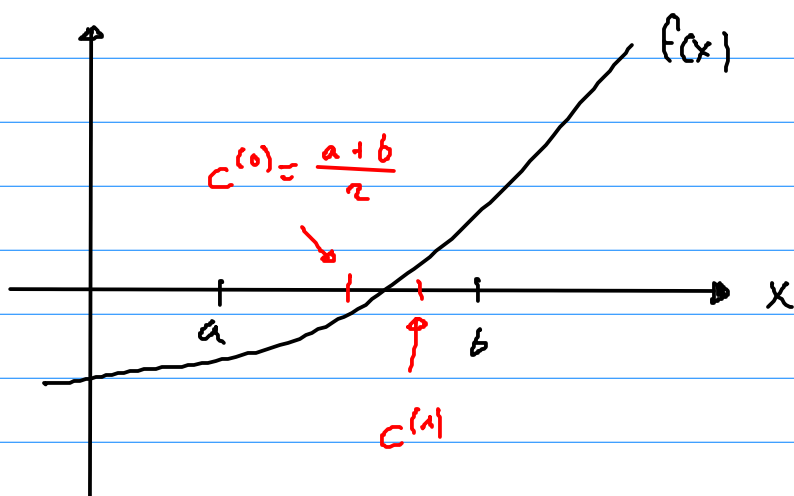
## IV.1.2 Bisektions-Verfahren

Annahme: Wir kennen  $a$  und  $b$  mit

$$F(a) \cdot F(b) < 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{oder} \\ F(a) < 0 \quad \text{und} \quad F(b) > 0 \\ F(a) > 0 \quad \text{und} \quad F(b) < 0 \end{array} \right.$$

D.h. Nullstelle ist eingeschlossen!

Idee: Halbiere das Intervall  $[a, b]$  und behalte die Hälfte welche auch obige Annahme erfüllt ...



Bem.: (i) Sehr einfach und robust (benötigt nur  $f$ )

(ii) A priori Fehlerschätzer  $\epsilon^{(k)} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$

(iii) Langsame Konvergenz (linear)

(iv) Nicht direkt anwendbar auf Systeme

## IV.1.3 Newton-Verfahren

Idee: Linearisiere  $f$

Taylor-Entwicklung von  $f$  an der  $k$ -ten Iteration  $x^{(k)}$ :

$$f(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}) + \dots$$

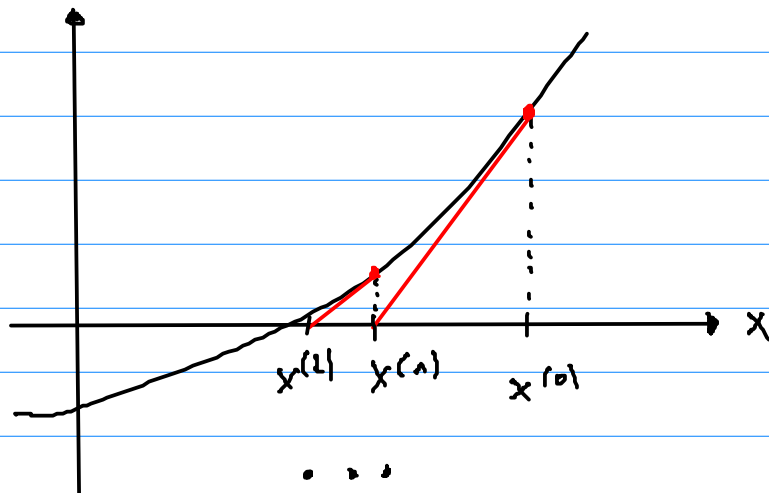
$$\underbrace{\hspace{15em}}$$

$$\tilde{f}(x) \stackrel{!}{=} 0 \leadsto x^{(k+1)}$$

$$\leadsto \tilde{f}(x^{(k+1)}) = f(x^{(k+1)}) + f'(x^{(k)}) \cdot (x^{(k+1)} - x^{(k)}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\leadsto x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Graphisch:





Bem.: (i) Benötigt  $f'$

(ii) Quadratische Konvergenz ( $p=2$ ) wenn  
nahe genug (an einer Nullstelle)

(iii) Kann schief gehen (Wann?) Wenn  $f' \approx 0!$

(iv) Verallgemeinerung für Systeme

## IV.2 Nichtlineare Gleichungssysteme

Problem: Geg. reelle vektorwertige Funktion

$$F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ löse}$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = 0$$

Kurz-Schreibweise für

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \vec{F}(\vec{x}) = 0$$

Bsp.: (3)  $n=2$ ,  $D = [0, 2]^2 \subset \mathbb{R}^2$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 - 2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_2 \cdot e^{x_1} - 2 = 0$$

$\leadsto$  Höhenlinien (Slides)

Die FPI verallgemeinert sich auf

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{\phi}(\vec{x}^{(k)})$$

## IV.2.1 Das Newton Verfahren

Idee: Linearisiere  $\vec{f}$

Taylor-Entwicklung von  $\vec{f}$  an der  $k$ -ten Iteration

$$\text{Jacobi-Matrix} \quad D\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}(\vec{x})$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}^{(k)}) + D\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) (\vec{x} - \vec{x}^{(k)}) + \dots$$

~~~~~

$$\vec{f} \approx \vec{f}(\vec{x}^{(k)}) + D\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) (\vec{x} - \vec{x}^{(k)}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - D\vec{f}(\vec{x}^{(k)})^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{(k)})$$

↑  
Inverse der Jacobi-Matrix

( Inverse NIE explizit berechnen!!!  
no Übungen

Bsp.: (4) Newton's Verfahren auf Bsp. (3)

no slides

Bem.: (i) Benötigt Jacobi-Matrix

(ii) Quadratische Konvergenz ( $p=2$ ) wenn nahe genug (an einer Nullstelle)

(iii) Kann schief gehen (Wann?)

↳ Wenn die Jacobi-Matrix  $\approx$  singular ist!

02.05.22