Dr. R. Käppeli
T. Gauksson

Lösung 1

1. Siehe `conwayGameOfLife.m`.

2. **a)** Die Lagrange Polynome sind gegeben durch

$$L_j^n(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

Das gilt

$$L_0^2(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 0}}^{2} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(2x - a - b)(x - b)}{(a - b)^2},$$

$$L_1^2(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 1}}^{2} \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = 4\frac{(x - a)(x - b)}{(b - a)(a - b)},$$

$$L_2^2(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 2}}^{2} \frac{x - x_i}{x_2 - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(2x - a - b)(x - a)}{(a - b)^2}.$$

b) Die Gewichte sind definiert durch

$$\omega_j = \int_a^b L_j^n(x)dx.$$

Das gilt

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \int_a^b L_0^2(x)dx = \frac{1}{(a-b)^2}\int_a^b (2x - a - b)(x - b)dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left(b(a+b)x - \frac{a+3b}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_{x=a}^{b} \right) = \frac{b-a}{6}, \\
\omega_1 &= \int_a^b L_1^2(x)dx = \frac{4}{(b-a)(a-b)}\int_a^b (x - a)(x - b)dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{(b-a)(a-b)} \left(abx - \frac{a+b}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=a}^{b} \right) = 4\frac{b-a}{6},$$

$$\omega_2 = \int_a^b L_2^2(x)dx = \frac{1}{(a-b)^2} \int_a^b (2x-a-b)(x-a)dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2} \left(a(a+b)x - \frac{b+3a}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_{x=a}^{b} \right) = \frac{b-a}{6}.$$

c) Wir haben

$$S[1] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j 1 = \frac{2}{6}(1+4+1) = 2 = I[1],$$

$$S[x] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j = \frac{2}{6}(-1+4\cdot 0+1) = 0 = I[x],$$

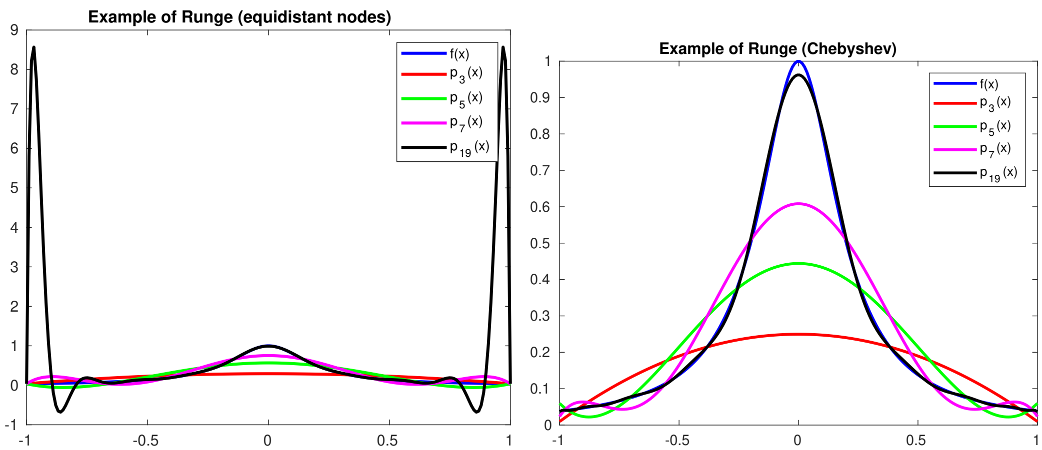
$$S\left[x^2\right] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^2 = \frac{2}{6}(1+4\cdot 0+1) = \frac{2}{3} = I\left[x^2\right],$$

$$S\left[x^3\right] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^3 = \frac{2}{6}(-1+4\cdot 0+1) = 0 = I\left[x^3\right],$$

$$S\left[x^4\right] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^4 = \frac{2}{6}(1+4\cdot 0+1) = \frac{2}{3} \neq \frac{2}{5} = I\left[x^4\right].$$

Man sieht, dass die Simpson-Regel Polynome bis Grad 3 exakt integrieren kann, d.h. ein Grad mehr als man vom zugrundelegenden quadratischen Interpolationspolynom erwarten würde.

3. Für den Code, siehe `runge_equi.m` und `runge_cheby.m`. Wenn nur 6 Stützstellen verwendet werden, sieht man in Abbildung 1 keinen grossen Unterschied. Die Approximation mit äquidistanten Stützstellen wird jedoch sehr schlecht, wenn die Anzahl von Punkten erhöht wird. Im Gegenteil, wird die Approximation mit intelligent verteilte Stützstellen besser.



(a) (b)

Abbildung 1: Approximation mit (a) äquidistanten Stützstellen und mit (b) intelligent verteilte Stützstellen.