Dr. R. Käppeli
T. Gauksson

Lösung 2

1. **a)** In the given quadrature formula, the 3 quadrature weights are unknown. To determine these 3 degrees of freedom, we need 3 equations. We obtain these from the definition of **degree of accuracy (Genauigkeitsgrad)** of a quadrature formula, see lecture notes *Kap01_Notizen.pdf, page 15*. We also note that $I[f]$ and $Q[f]$ are **linear**. Therefore, we test the given quadrature formula for exact integration with respect to monomials $1, x, x^2$:

$$Q[1] = \alpha + \beta + \gamma \qquad = I[1] = 1, \tag{1a}$$

$$Q[x] = \frac{\beta}{2} + \gamma \qquad = I[x] = \frac{1}{2}, \tag{1b}$$

$$Q[x^2] = \frac{\beta}{4} + \gamma \qquad = I[x^2] = \frac{1}{3}. \tag{1c}$$

Now, we solve this linear system of equations (1). Subtracting (1c) from (1b),

$$\frac{\beta}{4} = 1/6 \qquad \Longrightarrow \beta = \frac{4}{6}.$$

Using the value of β in (1b), we get

$$\gamma = \frac{1}{6}.$$

Then, substituting values of β and γ in (1a),

$$\alpha = \frac{1}{6}.$$

b) We want to approximate the integral $I_{[a,b]}[f] := \int_a^b f(x)dx$. If we can find an equivalent integral $I_{[a,b]}[f] = I_{[0,1]}[\tilde{f}] := \int_0^1 \tilde{f}(\xi)d\xi$, then we can use the given quadrature formula $Q[\tilde{f}]$ to approximate $I_{[a,b]}[f]$. We use the transformation

$$x = a + (b-a)\xi, \quad \forall \xi \in [0,1].$$

One can verify that at $\xi = 0$, $x = a$ and at $\xi = 1$, $x = b$.

Therefore, we get:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{d\xi} = (b-a),\\
\implies\ & I_{[a,b]}[f] = \int_0^1 (b-a)\cdot f(a+(b-a)\xi)d\xi\\
&\qquad = \int_0^1 \tilde{f}(\xi)d\xi \quad [\text{define } \tilde{f}(\xi) = (b-a)\cdot f(a+(b-a)\xi)],\\
&\qquad = I_{[0,1]}[\tilde{f}].
\end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned}
I_{[a,b]}[f] &\approx Q[\tilde{f}]\\
&= \frac{1}{6}(\tilde{f}(0) + 4\tilde{f}(1/2) + \tilde{f}(1))\\
&= \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)).
\end{aligned}$$

This we know is the **Simpson rule**.

2. **a)** In the given quadrature formula, the quadrature nodes and weights are unknown. To determine these degrees of freedom such that the **degree of accuracy (Genauigkeitsgrad)** $q = 3$, we test the given quadrature formula for exact integration with respect to monomials x^j, for $j = 0, 1, \dots, q$,

$$Q[1] = 2(\omega_0 + \omega_1) = \ I[1] = 2, \tag{2a}$$

$$Q[x] = 2(\omega_0 x_0 + \omega_1 x_1) = \ I[x] = 0, \tag{2b}$$

$$Q[x^2] = 2(\omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2) = \ I[x^2] = \frac{2}{3}, \tag{2c}$$

$$Q[x^3] = 2(\omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3) = \ I[x^3] = 0. \tag{2d}$$

From (2a),

$$\omega_1 = 1 - \omega_0.$$

Using this in (2b),

$$x_1 = -\omega_0 x_0/(1-\omega_0).$$

Then from (2d),

$$\begin{aligned}
\omega_0 x_0^3 &= -\omega_1 x_1^3\\
&= -(1-\omega_0)\left(-\frac{\omega_0 x_0}{1-\omega_0}\right)^3\\
&= \frac{\omega_0^3 x_0^3}{(1-\omega_0)^2},\\
\rightsquigarrow \quad \omega_0 &= 1/2.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\Longrightarrow \omega_1 = 1/2, \quad x_1 = -x_0$$

Finally, using the above information in (2c) yields

$$x_0 = \mp 1/\sqrt{3}, \;\; x_1 = \pm 1/\sqrt{3}.$$

and

$$Q[f] = f(-1/\sqrt{3}) + f(+1/\sqrt{3})$$

b) We proceed similar to the solution of 1b). Here, the tranformation will be

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi, \quad \forall \xi \in [-1,1].$$

One can verify that at $\xi = -1$, $x = a$ and at $\xi = 1$, $x = b$.

Therefore, we get:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\xi} &= \frac{b-a}{2}, \\
\Longrightarrow \; I_{[a,b]}[f] &= \int_{-1}^{1} \frac{b-a}{2} \cdot f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right) d\xi \\
&= \int_{-1}^{1} \tilde{f}(\xi) d\xi \quad [\text{define } \tilde{f}(\xi) = \frac{b-a}{2} \cdot f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi\right)], \\
&= I_{[-1,1]}[\tilde{f}].
\end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned}
I_{[a,b]}[f] &\approx Q[\tilde{f}] \\
&= \tilde{f}(-1/\sqrt{3}) + \tilde{f}(+1/\sqrt{3}) \\
&= \frac{b-a}{2}\{f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}a + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}b\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}a + \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}b\right)\}.
\end{aligned}$$

3. a) For $x = \tan(s)$, we have

$$\frac{dx}{ds} = \sec^2(s).$$

Thus, we can write

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^4)\, dx = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \exp(-\tan^4(s))\; \sec^2(s)\, ds.$$

b) With $x = -\log(s)$ we have

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{1}{s},$$

and thus

$$I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^4)\, dx = \int_1^0 \exp(-(-\log(s))^4)\, \frac{-1}{s}\, ds = \int_0^1 \frac{\exp(-\log^4(s))}{s} ds.$$

(Note that the transformation $x = -\log(s)$ is decreasing, so the interval of integration is reversed.)

4. a) Wir betrachenten das Interpolationspolynom

$$p\left[f|x_0, x_1, x_2\right](x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\; L_i^2(x) =$$
$$f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + f(x_2)\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Dann erhalten wir eine Approximation der ersten und zweite Ableitung

$$\begin{aligned}
&p'\left[f|x_0, x_1, x_2\right](x) = \\
&\quad \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}(2x-(x_1+x_2)) + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}(2x-(x_0+x_2)) \\
&\qquad + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}(2x-(x_0+x_1)) \\
&p''\left[f|x_0, x_1, x_2\right](x) = \\
&\quad 2\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + 2\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + 2\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}
\end{aligned}$$

b) Nun setzen wir $x_0 = x-h$, $x_1 = x$ und $x_2 = x+h$. Somit erhalten wir für die erste Ableitung mittels Taylor-Entwicklung,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} &= \frac{1}{2h}\Bigg(f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\xi_1) \\
&\qquad -f(x) + hf'(x) - \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(\xi_2)\Bigg) \\
&= f'(x) + \frac{1}{12}h^2\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right) \\
&= f'(x) + \frac{1}{6}h^2 f'''(\xi)
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

für $\xi_1 \in [x-h, x]$ und $\xi_2 \in [x, x+h]$. Im letzten Schitt haben wir den Zwischenwertsatz (bekannt aus der Analysis) verwendet. Dieser garantiert uns, dass wir ein $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset [x-h, x+h]$ finden können mit

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right).$$

Ähnlich für die zweite Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \\
&\quad = \frac{1}{h^2}\Bigg(f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(\xi_1) - 2f(x) \\
&\qquad\quad + f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(\xi_2)\Bigg) \\
&\quad = f''(x) + \frac{1}{24}h^2\left(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)\right) = f''(x) + \frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

für $\xi_1 \in [x-h, x]$ und $\xi_2 \in [x, x+h]$. Auch hier können wir mit dem Mittelwertsatz ein $\xi \in [x-h, x+h]$ finden.

c) Aus der Taylor-Entwicklung erwarten wir, dass die Approximationen der ersten und zweiten Ableitung zweite Ordnung Konvergenz aufweisen (solange die relevante Ableitung beschränkt ist), d.h. das der Fehler der Approximation proportional zu h^2 ist. Dies ist durch die Steigung der entsprechenden Fehler in 1 bestätigt, bevor es Probleme gibt wegen der endlichen Genauigkeit der Maschine (Computer). Das Problem: je kleiner h desto näher sind sich $f(x)$ und $f(x \pm h)$. Bei der Subtraktion von fast gleich grossen Zahlen dominieren irgendwann die Rundungsfehler. Dieses Phänomen wird als Auslöschung bezeichnet. Wir werden dies nicht weiter in dieser Vorlesung diskutieren, aber es sollte Ihnen stets bewusst sein, dass Rechner eine endliche Genauigkeit besitzen. Um mehr über dieses und ähnliche Phänome zu erfahren, verweisen wir auf die weiterführende Literatur auf der Webseite.

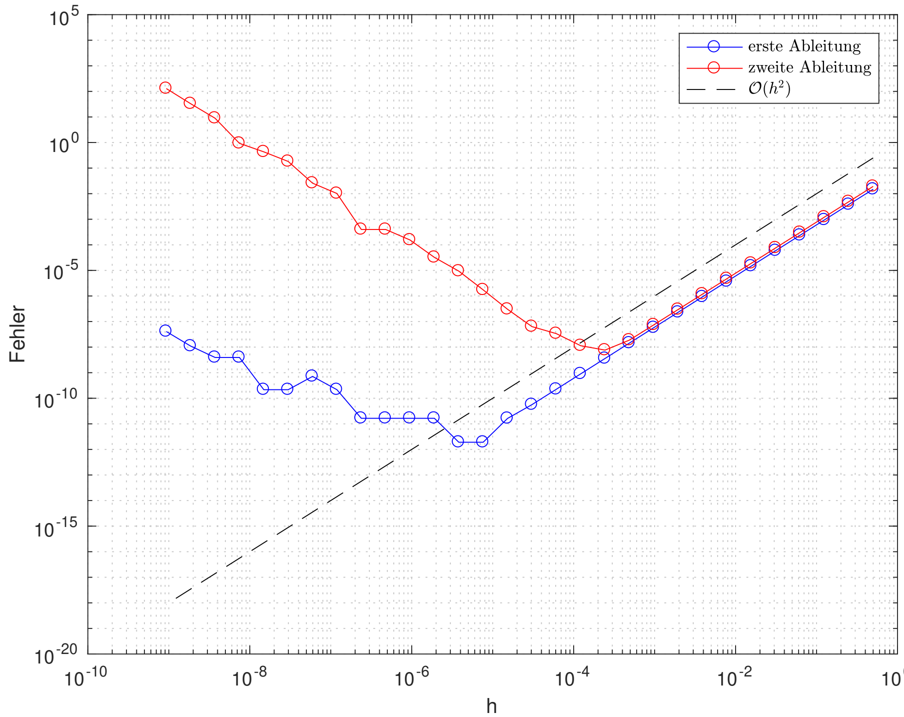

Abbildung 1: Fehler der Approximation der ersten und zweiten Ableitung.