

Serie 3

1. Konvergenzordnung summierter Quadraturformeln

a) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

$$y = \text{summtrapezregel}(f, a, b, N),$$

die das Integral $\int_a^b f(x) dx$ mit der summierten Trapezregel approximiert. Der Input N entspricht der Anzahl von Teilintervallen, in die das Intervall $[a, b]$ unterteilt wird.

b) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

$$y = \text{summsimpsonregel}(f, a, b, N),$$

die das Integral $\int_a^b f(x) dx$ mit der summierten Simpsonregel approximiert.

c) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

$$y = \text{summ2punktgauss}(f, a, b, N),$$

die das Integral $\int_a^b f(x) dx$ mit der summierten 2 Punkte Gauss Quadraturformel approximiert.

d) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

$$\text{summbestimmeordnung},$$

die die Ordnung einer summierten Quadratur bestimmt. Bestätigen Sie, dass die summierte Trapezregel die algebraische Konvergenzordnung 2 besitzt und dass die summierte Simpsonregel und die 2 Punkte Gauss Quadraturformel die algebraische Konvergenzordnung 4 besitzen.

e) Wiederholen Sie den Konvergenztest von Teilaufgabe d) für die Trapezregel mit dem Integrand

$$f_1(x) = x^5, f_2(x) = \sqrt{x-a}, f_3(x) = (x-a)^{5/2},$$

und die MATLAB Funktion definiert in `f_4.m`. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Bitte wenden!

f) Bestimmen Sie für jedes Verfahren die Anzahl von Funktionsauswertungen.

Hinweis: Siehe Beispiel (13) in den Vorlesungsnotizen welche auf der Vorlesungshomepage zu finden sind.

2. 3-Punkte Gauss Quadraturregel

In dieser Aufgabe wollen wir die berühmte 3-Punkte Gauss Quadraturregel $G_2[f]$ herleiten.

a) Berechnen Sie die Quadratur Knoten von $G_2[f]$ in dem Sie die Nullstellen des Legendre-Polynoms dritten Grades $P_3(x)$ bestimmen.

Hinweis: Zur Berechnung der Gewichte können Sie die Formel in den Vorlesungsnotizen verwenden:

$$\omega_k = \frac{2(1 - x_k^2)}{((j + 1)P_j(x_k))^2}, \quad k = 0, 1, 2.$$

b) Bestätigen Sie, dass $G_2[f]$ Ordnung 6 hat.

c) Ergänzen Sie das Template der MATLAB -Funktion

$$y = \text{summ3punktgauss}(f, a, b, N),$$

die das Integral $\int_a^b f(x) dx$ mit der summierten 3-Punkte Gauss Quadraturformel approximiert.

d) Wiederholen Sie den Konvergenztest von Serie 3 Aufgabe **1d)** für $G_2[f]$ mit den Integranden

$$f_1(x) = x \cos(x) \quad \text{und} \quad f_2(x) = (x - a)^{7/3}$$

mit $a = \sqrt{2}$ auf dem Intervall $[\sqrt{2}, \pi]$. Was beobachten Sie?

Hinweis: Siehe Beispiel (13) in den Vorlesungsnotizen welche auf der Vorlesungshomepage zu finden sind.

3. Gauss Knoten Verteilung

Verwenden Sie die MATLAB -Funktion `plot_gauss_nodes` welche die Gauss-Quadratur-Knoten im Referenz-Intervall $[-1, +1]$ plottet. Was fällt Ihnen auf im Vergleich mit der Knoten-Wahl bei Newton-Cotes Quadratur?

Siehe nächstes Blatt!

4. Konvergenz

In der numerischen Mathematik spricht man von algebraischer und exponentieller Konvergenz einer Methode, falls der Fehler der Methode sich wie

$$E(N) = CN^{-\alpha} \quad \text{bzw.} \quad E(N) = Cq^N$$

verhält für N gross genug. Hier sind C und α positive Konstanten, $q \in (0, 1)$ und N entspricht einem Methodenparameter (z.B. die Anzahl Teil-Intervalle einer summierten Quadraturregel oder den Genauigkeitsgrad/Ordnung einer Quadraturregel).

- a) Die MATLAB -Funktion `Konvergenz` berechnet Approximationen des bestimmten Integrals

$$I_i = \int_0^1 f_i(x) dx, \quad i = 1, 2, 3,$$

wobei

$$f_1(x) = \cosh(x), \quad f_2(x) = \sqrt{x}, \quad f_3(x) = \arcsin(x)$$

mittels Gauss-Legendre Quadratur und plottet die Quadraturfehler als Funktion der Anzahl Knoten der Quadraturregel. Beschreiben Sie welche Art von Konvergenz für f_1 , f_2 und f_3 vorliegt und bestimmen Sie im Falle algebraischer Konvergenz die Ordnung α und im Falle exponentieller Konvergenz die Rate q .

- b) Manchmal kann man durch eine geschickte (analytische) Manipulation des Integranden eine wesentliche Verbesserung des Konvergenz-Verhalten erreichen. Das Integral I_3 aus a) kann durch die Substitution $y = \arcsin(x)$ auf folgendes transformiert werden

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cos(y) dy \quad (\equiv I_3).$$

Beschreiben Sie nun welche Art von Konvergenz vorliegt und bestimmen Sie im Falle algebraischer Konvergenz die Ordnung α und im Falle exponentieller Konvergenz die Rate q .

- c) Nun wiederholen wir a) und b) mit den Newton-Cotes Quadraturregeln. Führen Sie hierzu die MATLAB -Funktion `Konvergenz_newcot` aus. Was beobachten Sie?

5. Gauss Quadratur mit Gewichtsfunktionen

Bitte wenden!

Wir wollen Integrale der Form

$$I[f] = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

mittels Quadratur approximieren. Hierzu bauen wir die Gauss Quadratur mit der Gewichtsfunktion

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (2)$$

- a) Berechnen Sie die ersten drei orthogonal Polynome bezüglich dem gewichteten Skalarprodukt,

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 w(x) f(x) g(x) dx. \quad (3)$$

Hinweis: Ausgehend von der Monobasis $v_j(x) = x^j$, bilden Sie eine Orthogonalbasis $p_j(x)$ bezüglich obigem gewichteten Skalarprodukt (3) mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren,

$$p_k(x) = v_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle v_k, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} p_j(x) \quad (4)$$

- b) Mit Ihrer in a) berechneten Orthogonalbasis bezüglich dem obigem gewichteten Skalarprodukt (3) bestimmen Sie die zwei-Punkte Gauss Quadratur für die Gewichtsfunktion $w(x)$.

Hinweis: Die Gewichte sind gegeben durch

$$w_j = \int_0^1 w(x) L_j^1(x) dx \quad (j = 0, 1),$$

wobei $L_j^1(x)$ ($j = 0, 1$) die Lagrange-Polynome zu den Knoten $x_{0,1}$ sind. Die Knoten sind die Nullstellen des in a) berechneten Orthogonalpolynom.

- c) Was ist der Vorteil Ihrer Quadratur aus b) gegenüber der Trapezregel für Integrale der Form (1) ?

Abgabe: Online bis **Freitag**, den 18.03.2022 unter `sam-up.math.ethz.ch`.