D-ITET, D-MATL Numerische Methoden FS 2022
Dr. R. Käppeli
T. Gauksson

Lösung 5

1. *Explizites Eulerverfahren*

a) Man erhält das Richtungsfeld in Abb. 1.

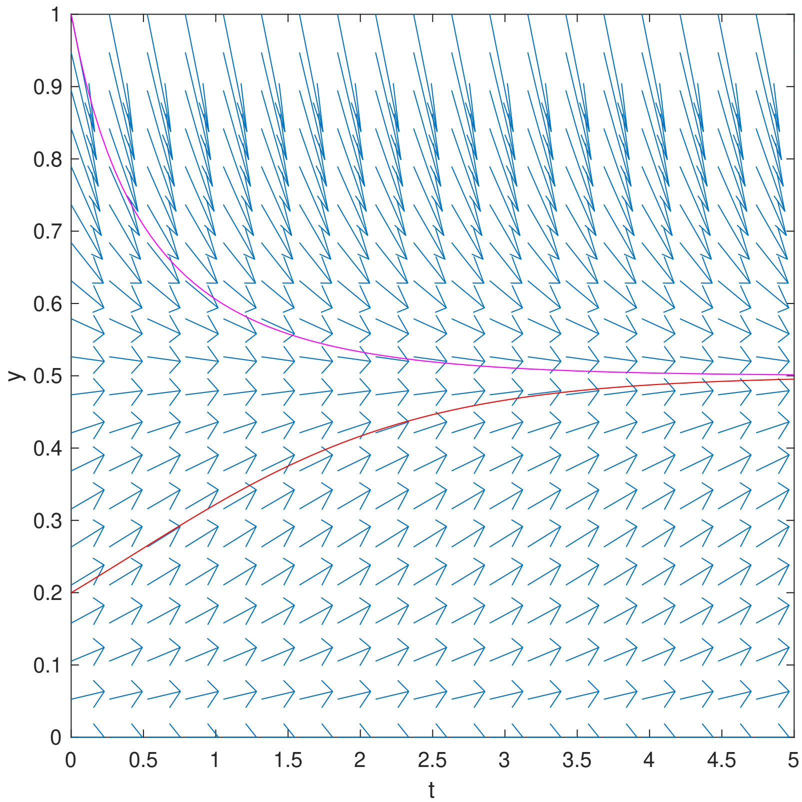

Abbildung 1: Richtungsfeld der logistischen Diff.-Gl. und zwei mit dem Euler Verfahren numerisch berechneten Lösungen.

b) Siehe das kommentierte `expEuler.m`.

c) Die beiden numerisch berechneten Lösungen sind in Abb. 1 dargestellt.

d) Wir beobachten, dass in dem `log-log`-Plot ($\log(h)$ vs. $\log(\text{Abs. Fehler})$) der absolute Fehler auf einer Geraden liegen (für $h \lesssim 0.1$). Dank dem Gitter erkennt

Bitte wenden!

man auch leicht, dass die Gerade ungefähr Steigung Eins hat. Also der absolute Fehler verhält sich wie $E_N = O(h^p)$ mit $p = 1$. Das explizite Euler Verfahren hat somit Ordnung Eins!

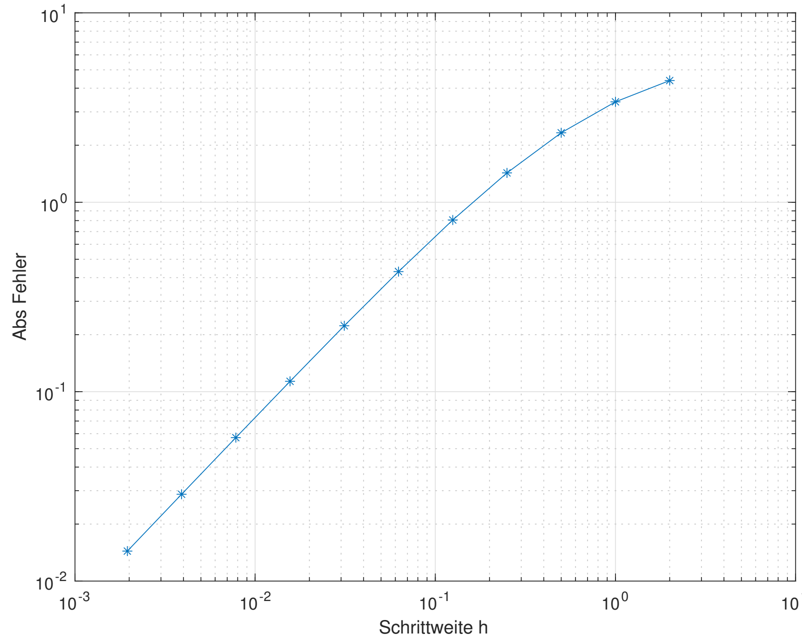

Abbildung 2: `loglog`-Plot des absoluten Fehlers als Funktion der Schrittweite.

2. *Picard-Iteration*

Die exakte Lösung des AWPs ist gegeben durch $\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{y}(0) = e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{c}$.

Behauptung: $\mathbf{y}^{[k]}(t) = \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!}\right)\mathbf{c}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Beweis durch vollständige Induktion: Für $k = 1$ haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{[1]}(t) &= \mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{y}^{[0]}(s)ds \\
&= \mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{c}ds \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\mathbf{c} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{1} \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!}\right)\mathbf{c}.
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Für $k = 2$ haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{[2]}(t) &= \mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{y}^{[1]}(s)ds \\
&= \mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A}s)\mathbf{c}ds \\
&= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2}\right)\mathbf{c} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{2} \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!}\right)\mathbf{c}.
\end{aligned}$$

Gehen wir davon aus, dass die Aussage für k bereits bewiesen ist. Dann für $k+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{[k+1]}(t) &= \mathbf{c} + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{y}^{[k]}(s)ds \\
&= \mathbf{c} + \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{\mathbf{A}^{j+1}}{j!} \int_0^t s^j ds\right)\mathbf{c} \\
&= \mathbf{c} + \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(\mathbf{A}t)^{j+1}}{(j+1)!}\right)\mathbf{c} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{k+1} \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!}\right)\mathbf{c}.
\end{aligned}$$

Da $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^j}{j!}$, erhalten wir dass

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{y}^{[k+1]}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c} = \mathbf{y}(t).$$

3. *Richardson-Extrapolation*

a) Aus Aufgabe 4 der Serie 2 wissen wir, dass bei zentrierten finiten Differenzen der dominierende Fehler-Term die Ordnung $k_1 = 2$ hat. Setzen wir dies in die Richardson-Extrapolations-Formel ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(h) &= \frac{A(h) - 2^2 A(h/2)}{1 - 2^2} = \frac{4A(h/2) - A(h)}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(4 \cdot \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{2(h/2)} - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}\right) \\
&= \frac{f(x-h) - 8f(x-h/2) + 8f(x+h/2) - f(x+h)}{6h} \\
&= A^* + \mathcal{O}(h^{k_2}).
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Aus der Vorlsung ist bekannt, dass bei der summierten Trapez-Regel der dominierende Fehler-Term die Ordnung $k_1 = 2$ hat. Setzen wir dies in die Richardson-Extrapolations-Formel ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(h) &= \frac{A(h) - 2^2 A(h/2)}{1 - 2^2} = \frac{4A(h/2) - A(h)}{3} \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{(h/2)}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{j=1}^{2N-1} f(a + jh/2) + f(b) \right) \\
&\qquad - \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) + f(b) \right) \\
&= \frac{h}{6} \left[f(a) + f(b) + 4 \sum_{j=1}^{2N-1} f(a + jh/2) - 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) \right] \\
&= \frac{h}{6} \left[f(a) + f(b) + 4 \left(\sum_{k=1}^{N} f\left(a + (2k-1)h/2\right) + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(a + (2k)h/2\right) \right) \right. \\
&\qquad \left. - 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) \right] \\
&= \frac{h}{6} \left[f(a) + 4 \sum_{j=1}^{N} f\left(a + \left(j - \tfrac{1}{2}\right) h\right) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) + f(b) \right] \\
&= A^* + \mathcal{O}(h^{k_2}).
\end{aligned}$$

Beobachten Sie, dass $\tilde{A}$ genau die summierte Simpson-Regel ist, d.h. $\tilde{A}(h) = Q_2^N[f]$.

c) Aus den Fehler-Plots in Abb. 3 entnehmen wir, dass die Richardson-extrapolierte zentrierte finite Differenz und die summierte Trapezregel Ordnung $k_2 = 4$ haben. In beiden Fällen haben wir also zwei Ordnungen gewonnen! Dies hat damit zu tun, dass die Fehler-Entwicklung beider Verfahren nur aus geraden Potenzen des Diskretisierungs-Parameters besteht.

4. *Umformen von Differentialgleichungen und Anfangswertproblemen*

a) Wir setzen

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \dddot{y}(t) \end{pmatrix},$$

Siehe nächstes Blatt!

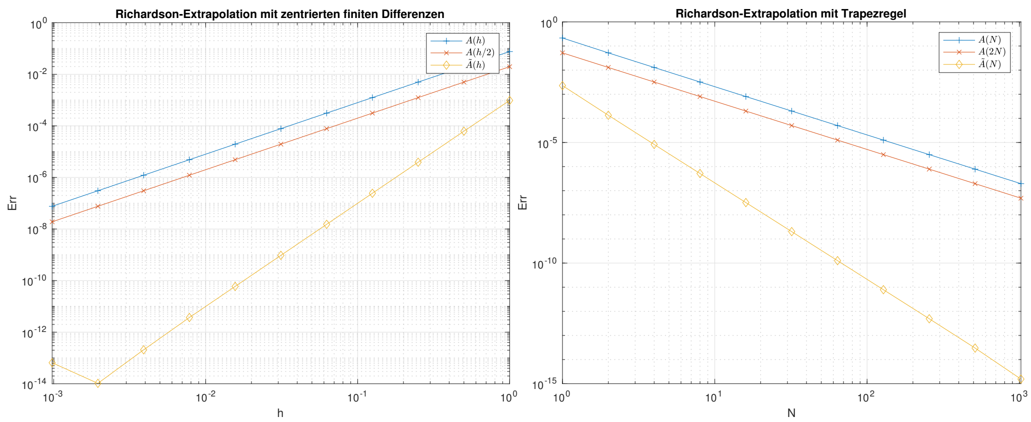

Abbildung 3: Richardson-Extrapolation angewendet auf zentrierte finite Differenzen (links) und die summierte Trapezregel (rechst).

und erhalten

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_2(t) + \cos(t) z_1(t) + \log\left(1 + (z_0(t))^2\right) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t)),$$

mit Anfangswert

$$\mathbf{z}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

b) Wir schreiben

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t/2} z_1(t) + \sin(z_2(t)) \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{z}(t)),$$

mit Anfangswert

$$\mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Wir schreiben[1]

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(t) \\ u_5(t) \end{pmatrix},$$

[1] Da das System erster Ordnung bereits mit der Variablen $\mathbf{z}(t)$ geschrieben ist, führen wir eine andere neue variable $\mathbf{u}(t)$ ein und folgen anschliessend einfach dem Autonomisierungs-Rezept aus **b)** mit den nötigen Anpassungen.

Bitte wenden!

und erhalten

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(u_5(t), \mathbf{u}_1(t)) \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{g}(\mathbf{u}(t)),$$

$$\mathbf{g}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_3 + \cos(u_5)u_2 + \log\left(1 + u_1^2\right) \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit Anfangswert

$$\mathbf{u}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \\ t_0 \end{pmatrix}.$$

5. *RLC Schaltkreis*

a) Sei $I := \dot{Q}$. Das äquivalente System von Differentialgleichungen erster Ordnung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ (E - Q/C - RI)/L \end{pmatrix}.$$

mit Anfangswerten

$$Q(t_0) = Q_0, \quad I(t_0) = I_0.$$

b) Siehe `expEulerRLC.m`. For the given settings, we observe that with time step size $\Delta t = 10^{-2}$ the explicit Euler method is unstable, because Δt has the same order of magnitude as of the time period of the forcing function E is $2\pi/100 \approx 0.06$. Therefore, when we decrease the time step size to 10^{-3}, the method becomes stable. For $\Delta t = 10^{-4}$ and even smaller time step sizes, the approximation accuracy increases.