D-ITET, D-MATL
Dr. R. Käppeli
T. Gauksson

Lösung 7

1. **a)** Wir haben

$$
\begin{aligned}
I[1] &= \int_0^1 1dx = 1,\\
I[x] &= \int_0^1 xdx = \frac{1}{2},\\
I[x^2] &= \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3},
\end{aligned}
$$

und für die Quadraturregel $Q[g]$

$$
\begin{aligned}
Q[1] &= \frac{1}{2}(1+1) = 1 \Rightarrow ✓\\
Q[x] &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow ✓\\
Q[x^2] &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = \frac{5}{16} \Rightarrow ✗
\end{aligned}
$$

Also hat die Quadraturregel Genauigkeitsgrad $q = 1$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Ordnung einer Quadraturregel gegeben durch $s = q+1$ ist. Damit hat die Quadraturregel Ordnung $s = 2$.

b) Wir betrachten das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. Durch Integration erhalten wir

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))ds.$$

Wir wenden dann unsere Quadraturregel auf das Integral für $t_1 = t_0 + h$ an und erhalten

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s))ds \approx \frac{h}{2}\left(f\left(t_0+\frac{h}{4}, y\left(t_0+\frac{h}{4}\right)\right) + f\left(t_0+\frac{3h}{4}, y\left(t_0+\frac{3h}{4}\right)\right)\right).$$

Wir approximieren $y\left(t_0+\frac{h}{4}\right)$ und $y\left(t_0+\frac{3h}{4}\right)$ mithilfe des expliziten Eulerverfahrens

$$
\begin{aligned}
y\left(t_0+\frac{h}{4}\right) &\approx y_0+\frac{h}{4}f(t_0,y_0),\\
y\left(t_0+\frac{3h}{4}\right) &\approx y_0+\frac{3h}{4}f(t_0,y_0),
\end{aligned}
$$

und erhalten

$$
\begin{cases}
k_1 := & f(t_0,y_0),\\
k_2 := & f\left(t_0+\frac{h}{4}, y_0+\frac{h}{4}k_1\right),\\
k_3 := & f\left(t_0+\frac{3h}{4}, y_0+\frac{3h}{4}k_1\right),\\
y_1 := & y_0+\frac{h}{2}(k_2+k_3).
\end{cases}
$$

c) Siehe `quadraturRK.m` und `konvergenzRK.m`. Wir beobachten eine Konvergenzordnung von $1.99 \approx 2$.

2. a) Ein Schritt des Verfahrens is gegeben durch

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(t_k, y_k\right),\\
k_2 &= f\left(t_k+\frac{h}{2}, y_k+\frac{h}{2}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(t_k+\frac{h}{2}, y_k+\frac{h}{2}k_2\right),\\
k_4 &= f\left(t_k+h, y_k+hk_3\right),\\
y_{k+1} &= y_k+\frac{h}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right).
\end{aligned}
$$

b) Siehe `klassischeRK.m`.

c) Siehe `konvergenzRK.m`. Wir beobachten eine Konvergenzordnung von 3.98 ≈ 4.

3. Siehe `lokglobFehler_linear.m`. Die lokale und globale Konvergenzordnungen für das Verfahren basierend auf der Quadraturregel sind 3.02 beziehungsweise 1.99. Für die klassische RK Methode haben wir 5.01 und 3.97 für die Ordnung des lokalen und globalen Diskretisierungsfehlers. Wir beobachten dann, dass die Ordnung des Einschritt-Fehlers um eins größer ist als die Ordnung des globalen Fehlers.

Siehe nächstes Blatt!

4. **a)** Wir haben

$$
\begin{aligned}
-2ty^2 &= -2(t_j+h)\left(y_j + c_1 h + c_2 h^2 + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots\right)^2 \\
&= -2(t_j+h)\left(y_j^2 + 2c_1 y_j h + (c_1^2 + 2c_2 y_j)h^2 + (2c_1 c_2 + 2c_3 y_j)h^3 + \dots\right) \\
&= \underbrace{\left(-2t_j y_j^2\right)}_{c_1} + \underbrace{\left(-2y_j^2 - 4c_1 t_j y_j\right)}_{2c_2} h + \underbrace{\left(-4c_1 y_j - 2t_j(c_1^2 + 2c_2 y_j)\right)}_{3c_3} h^2 \\
&+ \underbrace{\left(-2(c_1^2 + 2c_2 y_j) - 4t_j(c_1 c_2 + c_3 y_j)\right)}_{4c_4} h^3 + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= -2t_j y_j^2 \\
c_2 &= -y_j^2 - 2c_1 t_j y_j \\
c_3 &= \frac{1}{3}\left(-4c_1 y_j - 2t_j(c_1^2 + 2c_2 y_j)\right) \\
c_4 &= -\left(\frac{c_1^2}{2} + c_2 y_j + t_j(c_1 c_2 + c_3 y_j)\right)
\end{aligned}
$$

b) Siehe `run_taylorreihenmethode.m` und `taylorreihenmethode.m`.