Dr. R. Käppeli
T. Gauksson

Serie 7

1. *Explizites RK-ESV bauen*

Gegeben sei die folgende Quadraturregel auf dem Referenzintervall

$$I[g] = \int_0^1 g(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right)\right) = Q[g].$$

a) Überprüfen Sie, dass die Quadraturregel Ordnung 2 hat.

b) Verwenden Sie die Quadraturregel um ein RK-ESV zur Lösung von Anfangswertproblemen herzuleiten. Gehen Sie dazu wie inder Vorlesung vor und approximieren Sie die 2 unbekannten Zwischenwerte jeweils mit einem Schritt des expliziten Eulerverfahrens ausgehend von y_0.

Hinweis: Zur Überprüfung Ihres Ergebnisses: wir suchen

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & & \\ \hline & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

c) Untersuchen Sie die Konvergenzordnung dieses Verfahrens empirisch anhand vom AWP

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = & y(t), \\ y(0) = & 2. \end{cases}$$

Hinweis: Arbeiten Sie in den Templates `quadraturRK.m` und `konvergenzRK.m`.

2. *Das Klassische Runge-Kutta Verfahren*

Das klassische Runge-Kutta Verfahren ist gegeben durch folgendes Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Bitte wenden!

a) Schreiben Sie einen Schritt des Verfahrens (in Stufenform).

b) Implementieren Sie dieses Verfahren.

Hinweis: Arbeiten Sie im Template `klassischeRK.m`

c) Mithilfe des Templates von Aufgabe *1. c)*, untersuchen Sie die Konvergenzordnung des Verfahrens.

3. *Lokaler und globaler Diskretisierungsfehler*

Ergänzen Sie das Template `lokglobFehler_linear.m`, das den lokalen (nach einem Schritt) und globalen Diskretisierungsfehler des Verfahrens aus Aufgabe 1 und der klassischen Runge-Kutta mit dem AWP

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = & y(t), \\ y(0) = & 2. \end{cases}$$

untersucht. Was beobachten Sie?

4. *Die Methode der Taylorreihe*

Wir betrachten das skalare AWP

$$\dot{y} = -2ty^2 , \quad y(0) = 1$$

mit exakter Lösung

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Wir wollen dieses AWP mit der sog. Methode der Taylorreihe approximieren.

Ausgangspunkt der Methode ist die Taylorreihe mit Restglied der Lösungsfunktion

$$y(t) = y(t_0) + \dot{y}(t_0)(t - t_0) + \ddot{y}(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{2} + \cdots + y^{(p)}(t_0)\frac{(t - t_0)^p}{p!} + R_{p+1}.$$

Durch vernachlässigen des Restglieds erhält man mit der Schrittweite $h = t_{j+1} - t_j$ eine Rechenvorschrift zur Approximation der Lösung:

$$y(t_{j+1}) \approx y_{j+1} = y_j + h\dot{y}_j + \frac{h^2}{2}\ddot{y}_j + \cdots + \frac{h^p}{p!}y_j^{(p)}.$$

Hierbei bezeichnet $y_j^{(m)}$ den Wert der m-ten Ableitung im Punkt (t_j, y_j). Die zweiten und höheren Ableitungen lassen sich prinzipiell durch wiederholte Differentiation der DGL bestimmen. Dies wird jedoch schnell kompliziert und aufwendig.

Siehe nächstes Blatt!

Eine andere Möglichkeit ist durch Vergleich der Koeffizienten. Hierzu macht man folgenden Ansatz im Punkt (t_j, y_j):

$$y(t) = y_j + c_1(t - t_j) + c_2(t - t_j)^2 + c_3(t - t_j)^3 + c_4(t - t_j)^4 + \dots .$$

Diese Entwicklung wird zusammen mit ihrer ersten Ableitung in die DGL eingesetzt. Anschliessend macht man einen Koeffizientenvergleich bezüglich der Potenzen von $h = t - t_j$. Einsetzen in die Linke- und Rechte-Seite der DGL ergibt

$$\begin{aligned} \dot{y} &= c_1 + 2c_2h + 3c_3h^2 + 4c_4h^3 + \dots \\ -2ty^2 &= -2\underbrace{(t_j + h)}_{t}\underbrace{\left(y_j + c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + \dots\right)^2}_{y(t)^2} \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten c_1, c_2, c_3 und c_4.

b) Lösen Sie das AWP numerisch mit Ihrer Methode aus **(a)** bis zur Zeit $T = 1$ mit $N = 2^i$ ($i = 3, 4, ..., 9$) Schritten. Bestimmen Sie den absoluten Fehler zur Endzeit $|y_N - y(T)|$ und plotten Sie diesen Fehler als Funktion der Schrittweite $h = T/N$ in einem loglog-Plot.

Hinweis: Arbeiten Sie in den Templates `run_taylorreihenmethode.m` und `taylorreihenmethode.m`.

Abgabe: Online bis **Freitag**, den 15.04.2022 unter `sam-up.math.ethz.ch`.