

## Serie 8

### 1. Konsistenzordnung

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens von Heun gegeben durch folgendes Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

*Hinweis:* Studieren Sie Beispiel (18) in der Vorlesung.

### 2. Autonomisierungsinvariante Runge-Kutta Verfahren

Ein konsistentes Runge-Kutta Verfahren heisst *autonomisierungsinvariant*, wenn für dessen Koeffizienten

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1 \quad (\text{konsistent}) \quad \text{und} \quad c_i = \sum_{l=1}^s a_{il} \quad \text{für } i = 1, \dots, s \quad (1)$$

gilt. Diese Eigenschaft stellt sicher, dass man identische Ergebnisse für das autonome ( $\dot{y}(t) = f(y(t))$ ) und das ursprüngliche nicht autonome ( $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ ) AWP erhält.

a) Sind folgende Verfahren autonomisierungsinvariant:

(i) Das klassische Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(ii) Die verbesserte Polygonzug-Methode von Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 0 \quad 1 \end{array}$$

**Bitte wenden!**

(iii) Das 2-Stufen Oliver Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{6} & & \\ \frac{2}{3} & & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

(iv) SDIRK Methode dritter Ordnung

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1 - \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad \text{wobei} \quad \gamma = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

b) Wenn ein Verfahren autonomisierungsinvariant ist, reicht es die Konsistenzordnung für autonome AWPe zu bestimmen. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens von Heun.

*Hinweis:* Die Rechnung aus Aufgabe 1 sollte sich wesentlich vereinfachen.

### 3. Konsistenz- und Konvergenz-Ordnung

Es sei das RK-ESV mit dem folgenden Butcher-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{2}{3} & & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

- Schreiben Sie einen Schritt des Verfahrens (in Stufenform).
- Welche Konsistenzordnung hat das Verfahren?
- Was können Sie für die Konvergenzordnung schlussfolgern?

### 4. Konsistenz Expliziter Runge-Kutta Verfahren

Wir betrachten ein  $s$ -stufiges explizites Runge-Kutta Verfahren definiert durch das folgende Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & 0 & & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ c_s & a_{s1} & & a_{s,s-1} & 0 \\ \hline & b_1 & & \dots & b_s \end{array}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Verifizieren Sie, dass die Bedingung  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$  notwendig ist für die Konsistenz des Verfahrens.

*Hinweis:* Verifizieren Sie zuerst mittels Taylor-Reihenentwicklung, dass für den Schritt  $y_0 \rightarrow y_1$  für die Stufen gilt:  $k_i(h) = f(t_0, y_0) + \mathcal{O}(h)$ ,  $i = 1, \dots, s$ .

**Abgabe:** Online bis **Freitag**, den 29.04.2022 unter `sam-up.math.ethz.ch`.