

## Lösung 9

### 1. Toleranz Variieren

#### a) Given

$$y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad (1)$$

we have

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \frac{1}{1+t^2} \frac{d}{dt} \{t^2\} + t^2 \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{1+t^2} \right\} \\ &= \frac{2t}{1+t^2} - t^2 \frac{2t}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{2t}{(1+t^2)^2}. \end{aligned}$$

Hence, (1) solves the given AWP problem.

- b) See `tolVar.m`. We observe that the `ode45` solution diverges. The point of divergence is delayed as the tolerances become smaller.
- c) The exact solution remains the same when  $\lambda = -10$ .
- d) See `tolVar.m`. For  $\lambda = -10$ , we observe that `ode45` solution converges to the exact solution irrespective of the given absolute and relative tolerances.
- e) Specifying the tolerances controls the time step size in `ode45`. The observations from b) and d) can be explained based on *Satz II.3* in lecture notes *Kap02\_Notizen.pdf*, page 40.

**Remark:** The primary takeaway from this exercise is that one should not blindly trust the numerical solution provided by the integration schemes. Rather, perform simple tests, such as the one presented in this exercise, to verify their accuracy for your particular system.

## 2. Adaptives Heun-Verfahren

Der Vollständigkeit halber schreiben wir die Van der Pol-Gleichung in ein System erster Ordnung:

$$\begin{aligned}\dot{y}_0(t) &= y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) &= 8(1 - y_0(t)^2)y_1(t) - y_0(t).\end{aligned}$$

Die Anfangswerte sind dann

$$y_0(0) = 2 \quad , \quad y_1(0) = 0.$$

- a) In Abb. 1 werden die erhaltene Näherungslösung  $y(t)$  (links) und die Schrittweite  $h$  (rechts) gezeigt (erstellt mit `vanDerPol_adaptHeun.m` im Template Ordner). Wir beobachten, dass wenn die Lösung anfängt stärker zu variieren (bei

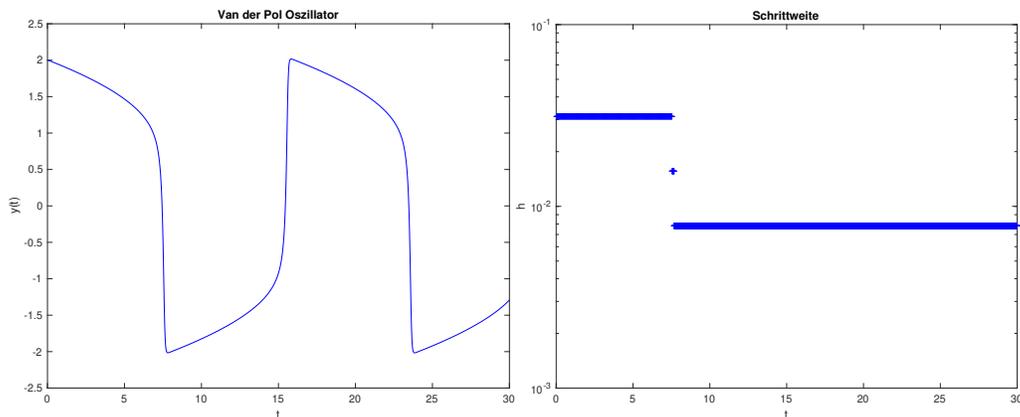


Abbildung 1: Lösung  $y(t)$  links und Schrittweite  $h$  rechts.

Zeit  $\sim 7$ ) reduziert der Algorithmus die Schrittweite sukzessiv. Anschliessend bleibt die Schrittweite jedoch konstant.

- b) Der in der Aufgabe beschriebene Algorithmus weist (mindestens) zwei offensichtliche Schwächen auf:
1. Wenn die Schrittweite einmal verkleinert wurde, z.B. wenn die Lösung stark variiert, wird sie nicht mehr erhöht, z.B. wenn die Lösung weniger variiert. Dieser Algorithmus ist nicht wirklich adaptiv!
  2. Es könnte passieren, dass der Algorithmus die Schrittweite halbiert ohne jemals das Toleranz-Kriterium zu erreichen, z.B. wenn die Toleranzen sehr klein gewählt sind.
- c) Die verbesserte Implementierung finden Sie im kommentierten `adaptHeun.m`. In Abb. 2 werden die Resultate mit dieser Implementierung gezeigt (erstellt mit `vanDerPol_adaptHeun.m` im Lösungs Ordner). Hier wird der Schrittweite wirklich adaptiert und es resultiert eine höhere Effizienz!

**Siehe nächstes Blatt!**

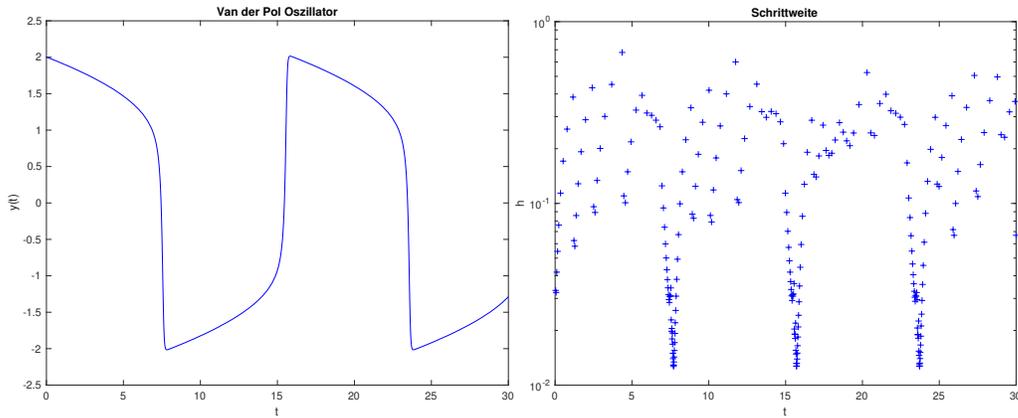


Abbildung 2: Lösung  $y(t)$  links und Schrittweite  $h$  rechts.

### 3. Zu Einfaches adaptives Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren

- a) Aus Abb. 3 wir lesen wir ab, dass die experimentale Ordnungen für die RK4 und RK5 Verfahren etwa vier und fünf sind. Siehe `RKF45Simple.m`.

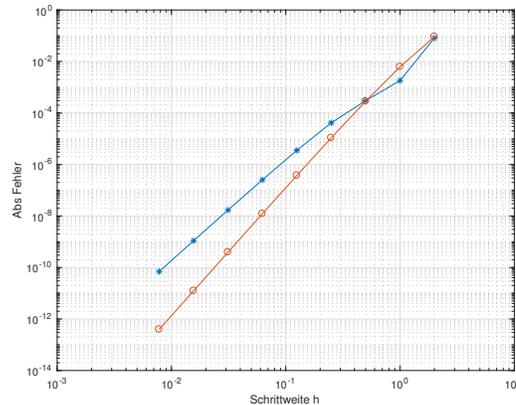


Abbildung 3: Konvergenzverhalten für die RK4 und RK5 Verfahren.

- b) Siehe `RKF45.m` und `vanDerPol_RKF45.m`. In Abb. 4 und 5 werden die erhaltenen Näherungslösung  $y(t)$  (links) und die Schrittweite  $h$  (rechts) dargestellt (erstellt mit `vanDerPol.m`). Auch hier liefert nur der verbesserte Algorithmus echte Adaptivität (und die damit verbundene Effizienz)!

### 4. Mehrschrittverfahren: Das 2-Schrittverfahren von Adams-Bashforth

**Bitte wenden!**

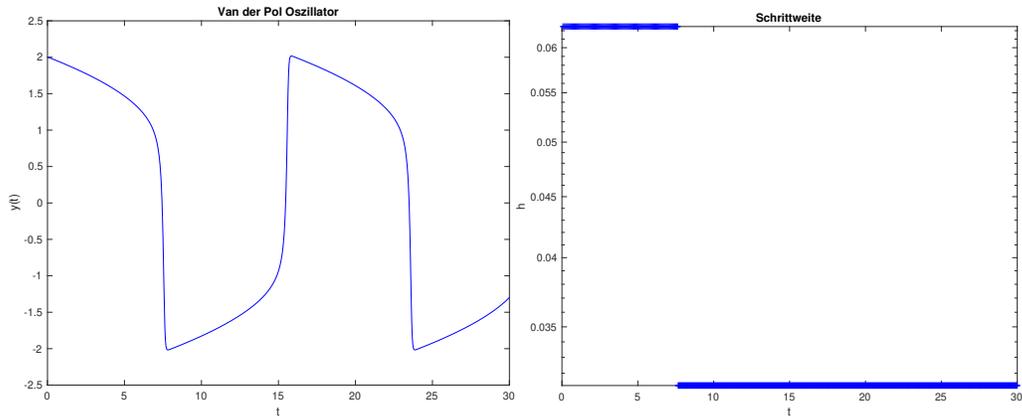


Abbildung 4: Lösung  $y(t)$  links und Schrittweite  $h$  rechts.

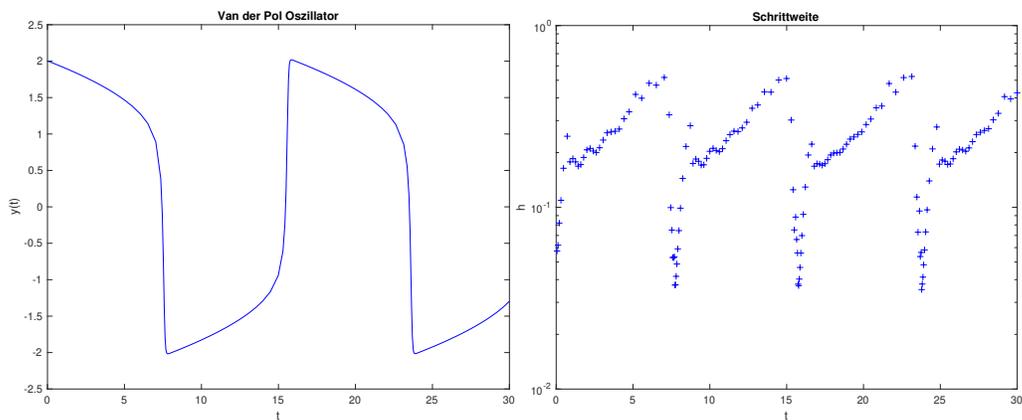


Abbildung 5: Lösung  $y(t)$  links und Schrittweite  $h$  rechts.

a) Für  $m = 2$ ,

$$\begin{aligned}
 P_1(t) &= \sum_{k=1}^2 f_{j+1-k} L_{j+1-k}^2(t) \\
 &= f_j L_j^2(t) + f_{j-1} L_{j-1}^2(t),
 \end{aligned}$$

wobei

$$\text{mit } k = 1 : L_j^2(t) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^2 \frac{t - t_{j+1-l}}{t_{j+1-k} - t_{j+1-l}} = \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}},$$

$$\text{mit } k = 2 : L_{j-1}^2(t) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^2 \frac{t - t_{j+1-l}}{t_{j+1-k} - t_{j+1-l}} = \frac{t - t_j}{t_{j-1} - t_j}.$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Wir haben

$$\begin{aligned} P_1(t) &= f_j \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} + f_{j-1} \frac{t - t_j}{t_{j-1} - t_j} \\ &= \frac{1}{h} (f_j \cdot (t - t_{j-1}) - f_{j-1} \cdot (t - t_j)). \end{aligned}$$

Dann

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} P_1(\tau) d\tau &= \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} [f_j \cdot (t - t_{j-1}) - f_{j-1} \cdot (t - t_j)] d\tau \\ &= \frac{1}{h} \left[ f_j \cdot \left( \frac{\tau^2}{2} - t_{j-1} \tau \right) - f_{j-1} \cdot \left( \frac{\tau^2}{2} - t_j \tau \right) \right]_{t_j}^{t_{j+1}} \\ &= \frac{1}{h} \left[ f_j \cdot \left( \frac{t_{j+1}^2}{2} - \frac{t_j^2}{2} - t_{j-1} h \right) - f_{j-1} \cdot \left( \frac{t_{j+1}^2}{2} - \frac{t_j^2}{2} - t_j h \right) \right] \\ &= f_j \cdot \frac{1}{h} \left( \frac{(t_{j+1} + t_j)(t_{j+1} - t_j)}{2} - t_{j-1} h \right) \\ &\quad - f_{j-1} \cdot \frac{1}{h} \left( \frac{(t_{j+1} + t_j)(t_{j+1} - t_j)}{2} - t_j h \right) \\ &= f_j \cdot \frac{1}{h} \left( \frac{t_{j+1} + t_j}{2} h - t_{j-1} h \right) - f_{j-1} \cdot \frac{1}{h} \left( \frac{t_{j+1} + t_j}{2} h - t_j h \right) \\ &= f_j \cdot \left( \frac{t_{j-1} + 2h + t_{j-1} + h}{2} - t_{j-1} \right) - f_{j-1} \cdot \left( \frac{t_j + h + t_j}{2} - t_j \right) \\ &= f_j \cdot \frac{3h}{2} - f_{j-1} \cdot \frac{h}{2} \\ &= \frac{h}{2} (3f_j - f_{j-1}) \end{aligned}$$

und wir bekommen

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2} (3f(t_j, y_j) - f(t_{j-1}, y_{j-1})).$$

- b) Siehe AB2.m
- c) Siehe KonvTestAB2.m
- d) Um die Konsistenzordnung  $p$  eines Verfahrens mit Verfahrens-Funktion  $\Phi$  zu bestimmen, müssen wir den Konsistenzfehler

$$\tau_{j+1} = \frac{y(t_j + h) - y(t_j)}{h} - \Phi(t_j, y(t_j), h) = O(h^p)$$

**Bitte wenden!**

mittels Taylor-Entwicklungen abschätzen. Hierzu entwickelt man die Lösung und die Verfahrens-Funktion in Potenzen der Schrittweite  $h$

$$\begin{aligned}\tau_{j+1} = & \left( \dot{y}(t_j) - \Phi(t_j, y(t_j), 0) \right) \\ & + \frac{h}{2} \left( \ddot{y}(t_j) - 2\dot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0) \right) \\ & + \frac{h^2}{6} \left( \ddot{y}(t_j) - 3\ddot{\Phi}(t_j, y(t_j), 0) \right) \\ & + \dots \\ & + O(h^p).\end{aligned}\tag{2}$$

Um die Konsistenzordnung  $p$  zu bestimmen, muss man nun "einfach" die Terme in den Klammern ausrechnen bis zum ersten der ungleich Null ist.

Einerseits benötigen wir die Ableitungen der Lösung, ausgedrückt mit (Ableitungen) der rechten Seite der Diff.-Gl.  $f(t, y(t))$ :

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t))\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) &= \frac{d}{dt} f(t, y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t))\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\dddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} f(t, y(t)) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t)) f(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t)) f(t, y(t))^2 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \right)^2 f(t, y(t)).\end{aligned}\tag{5}$$

Es empfiehlt sich, diese einfachen (aber durchaus mühsamen) Rechnungen (einmal) selbst durchzurechnen.

Mit der Taylorreihe können wir schreiben

$$y_{j-1} = y_j - h\dot{y}(t_j) + O(h^2).$$

Die Verfahrens-Funktion dieses MehrSchrittverfahren ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Phi(t, y(t), h) &= \frac{1}{2} \left( 3k_1(t, y(t), h) - k_2(t, y(t), h) \right), \\ k_1 &= f(t_j, y_j) \\ k_2 &= f(t_j - h, y_j - hk_1).\end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Da wir  $t$  und damit auch  $y(t)$  fest halten, vereinfachen wir die Notation zu

$$\Phi(h) = \frac{1}{2} \left( 3k_1(h) - k_2(h) \right).$$

Die Entwicklung der ersten Stufe ergibt einfach eine Konstante

$$k_1(h) = f(t, y(t)),$$

da wir ja  $t$  festhalten. Für die Entwicklung der zweiten Stufe benötigt man die zwei-dimensionale Taylor-Entwicklung (siehe Vorlesung):

$$\begin{aligned} k_2(h) &= f(t - h, y(t) - hk_1(h)) \\ &= f(t, y(t)) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t))h - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))hk_1(h) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t))h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))h^2 k_1(h) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))(hk_1(h))^2 \\ &\quad + O(h^3) \\ &= f(t, y(t)) \\ &\quad - h \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) \right) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))f(t, y(t))^2 \right) \\ &\quad + O(h^3) \end{aligned}$$

wobei wir nach dem dritten Gleichheitszeichen  $k_1(h)$  durch vorherige Gleichung ersetzt haben. Somit ergibt sich die Entwicklung der Verfahrens-Funktion zu

$$\begin{aligned} \Phi(h) &= \frac{1}{2} \left( 3k_1(h) - k_2(h) \right) \\ &= \underbrace{f(t, y(t))}_{\Phi(t, y(t), 0)} \\ &\quad + h \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) \right)}_{\dot{\Phi}(t, y(t), 0)} \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \underbrace{\frac{1}{2} \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y(t)) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y(t))f(t, y(t)) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y(t))f(t, y(t))^2 \right)}_{\ddot{\Phi}(t, y(t), 0)} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

(6)

**Bitte wenden!**

Mit Gl. (3-5) und (6) können wir die Terme in den Klammern von Gl. (2) berechnen. Es ergibt sich

$$\dot{y}(t) = \Phi(y, y(t), 0)$$

$$\ddot{y}(t) = 2\dot{\Phi}(y, y(t), 0)$$

$$\ddot{y}(t) \neq 3\ddot{\Phi}(y, y(t), 0),$$

d.h. der erste und der zweite Klammer-Term in Gl. (2) sind Null und hierraus folgern wir, dass das Adams-Bashforth Verfahren Konsistenzordnung  $p = 2$  hat, d.h.

$$\tau_{j+1} = \frac{y(t_j + h) - y(t_j)}{h} - \Phi(t_j, y(t_j), h) = O(h^2).$$