Dr. R. Käppeli
T. Gauksson

Lösung 10

1. *Fixpunkte*

Der Punkt x ist einen Fixpunkt für die Funktion ϕ falls $\phi(x) = x$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
&x = \phi(x) \\
\Leftrightarrow\ &0 = x^3 - 14x^2 + 59x - 70 \\
\Leftrightarrow\ &0 = x^3 - 12x^2 + 35x - 2x^2 + 24x - 70 \\
\Leftrightarrow\ &0 = (x^2 - 12x + 35)(x - 2) \\
\Leftrightarrow\ &0 = (x - 7)(x - 5)(x - 2) \\
\Leftrightarrow\ &x \in \{7, 5, 2\}.
\end{aligned}$$

2. *Fixpunktiteration*

a) Für die verschiedene Funktionen haben wir

- $x = \phi_1(x) = e^{-x} \Leftrightarrow 1 = xe^x \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$.
- $x = \phi_2(x) = \frac{x^2e^x+1}{e^x(x+1)} \Leftrightarrow x^2e^x + xe^x = x(x+1)e^x = x^2e^x + 1 \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$.
- $x = \phi_3(x) = x + 1 - xe^x \Leftrightarrow 0 = xe^x - 1 = f(x)$.

Deshalb sind alle drei Fixpunktfunktionen konsistent mit dem Nullstellenproblem.

b) Siehe `fixpunkt.m`.

c) Siehe `fixpunktproblem.m`. Wir sehen, dass der Algorithmus für ϕ_3 divergiert.

d) Siehe `fixpunktkonvergenz.m`. Wir erhalten für Fixpunktiteration ϕ_1 $C \approx 0.55$ und $p \approx 1$, d.h. die Fixpunktiteration ϕ_1 konvergiert linear.

Wir erhalten für Fixpunktiteration ϕ_2 $C \approx 0.8$ und $p \approx 2$, d.h. die Fixpunktiteration ϕ_2 konvergiert quadratisch.

Bitte wenden!

3. *Skalare nichtlineare Gleichung*

Die zu lösende Gleichung erhalten wir direkt

$$f(x) = e^{2x} - \sin(x) - 2 \tag{1}$$

und die positive Nullstelle liegt bei $x \approx 0.44382$. Um geeignete Startwerte zu finden lohnt es sich oft die skalare Funktion dessen Nullstelle wir suchen zu Plotten (s. Abb. 1). Die verschiedenen Implementierungen finden Sie in `skalaregleichung.m`.

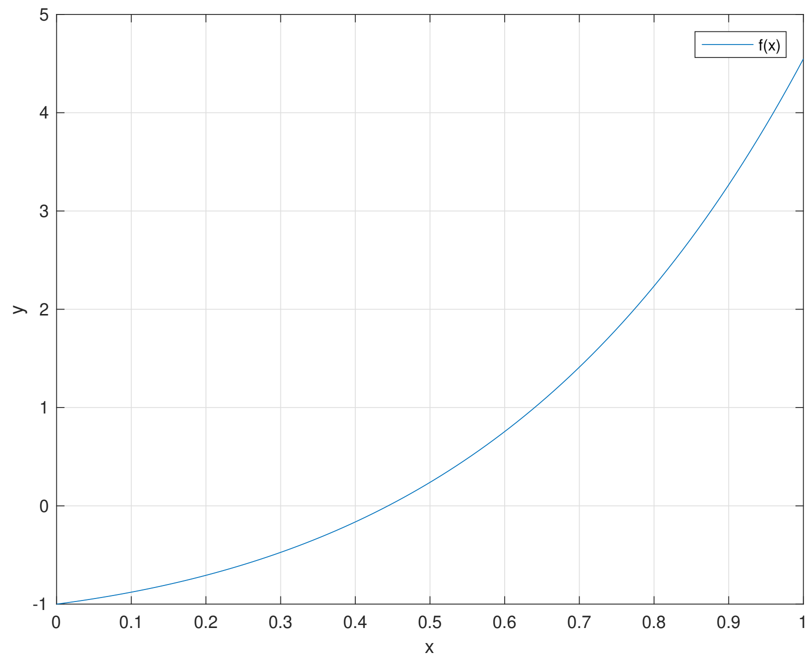

Abbildung 1: Die Funktion $f(x) = e^{2x} - \sin(x) - 2$.

4. *Newton mehrere Dimensionen*

a) Siehe `newton.m`.

b) In Abbildung 2 zeigen wir die Höhenlinien der Funktion F. Wir sehen, dass die Nullstellen in der Nähe vone $(0, 2)$ und $(1.15, 0.6)$ sind.

Siehe `plotKonvergenznewton2D.m` und Abbildung 3. Wir sehen, dass in der Nähe von (x_i, y_i) , $i = 1, 2$, konvergiert das Verfahren durch (x_i, y_i). Startwerte in der blauen/roten Region konvergieren durch $(x_1, y_1)/(x_2, y_2)$. Aber in der Nähe der Grenze divergiert das Verfahren (schwarze Punkte).

5. *Explizites und Implizites Euler-Verfahren*

Siehe nächstes Blatt!

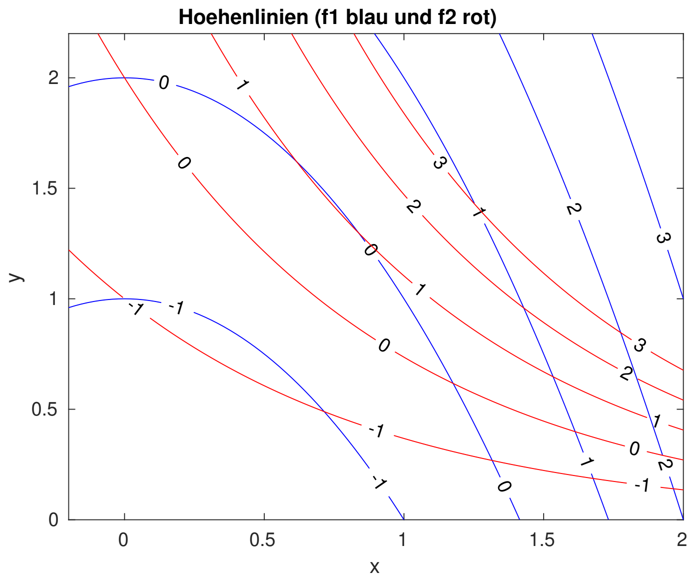

Abbildung 2: Höhenlinien der Funktion F.

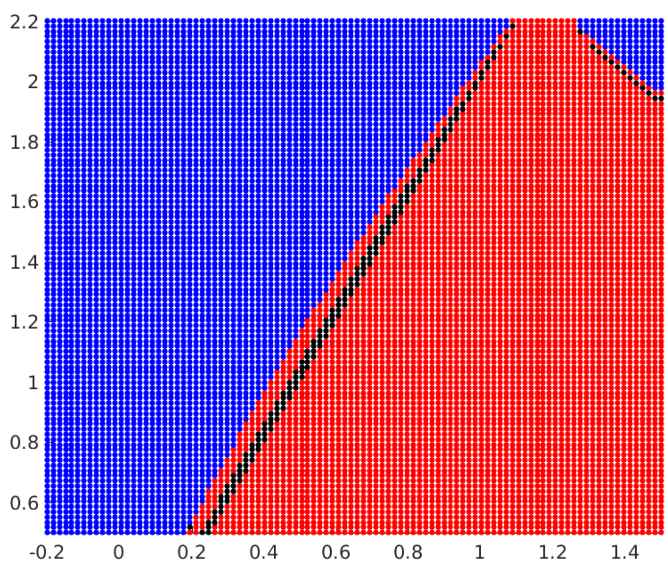

Abbildung 3: Konvergenz des Newton Verfahrens.

a) Für das Problem

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t), \qquad y(t_0) = y_0,$$

ist einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens gegeben durch

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(-\lambda y_0) = (1 - h\lambda)y_0.$$

Bitte wenden!

Für das implizite Euler-Verfahren erhalten wir

$$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1) = y_0 + h(-\lambda y_1) = y_0 - h\lambda y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{y_0}{1+h\lambda}.$$

Wir bemerken, dass für das implizite Euler-Verfahren eine (lineare) Gleichung gelöst werden muss.

b) Für das Problem

$$\dot{y}(t) = -t(y(t))^2, \qquad y(t_0) = y_0 > 0,$$

ist einen Schritt des expliziten Euler-Verfahrens gegeben durch

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + h(-t_0 y_0^2) = y_0(1 - ht_0 y_0).$$

Für das implizite Euler-Verfahren erhalten wir

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(t_1, y_1) = y_0 + h(-t_1 y_1^2) = y_0 - ht_1 y_1^2 \\ &\Leftrightarrow ht_1 y_1^2 + y_1 - y_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow y_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4ht_1 y_0}}{2ht_1}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass für das implizite Eulerverfahren ist die Lösung nicht eindeutig.

c) Siehe `expEulerlinear.m`, `implEulerlinear.m` und `KonvTestEuler.m`. Wir bemerken, dass für grosse Schrittweiten das explizite Euler-Verfahren “instabil” scheint (die Lösung oszilliert und wächst). Hingegen liefert das implizite Verfahren für jede Schrittweite eine stets abnehmende Lösung (was qualitativ mit der exakten Lösung dieses AWP übereinstimmt).