

## Serie 10

### 1. Fixpunkte

Geben Sie alle Fixpunkte der Fixpunktfunktion  $\phi(x) = x^3 - 14x^2 + 60x - 70$  an.  
*Hinweis:*  $x = 2$  ist einer der Fixpunkte und faktorisieren Sie.

### 2. Fixpunktiteration und Konvergenz

Wir betrachten das Nullstellenproblem

$$f(x) = xe^x - 1 = 0$$

auf dem Intervall  $[0, 1]$  und die Fixpunktiterationen

$$x^{(k+1)} = \phi_i(x^{(k)}) \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

mit den folgenden drei Fixpunktfunktionen

- $\phi_1(x) = e^{-x}$
- $\phi_2(x) = \frac{x^2 e^x + 1}{e^x(x+1)}$
- $\phi_3(x) = x + 1 - xe^x$ .

**a)** Zeigen Sie für  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), dass das Fixpunktproblem konsistent mit dem Nullstellenproblem ist.

**b)** Schreiben Sie eine MATLAB Funktion

$$x = \text{fixpunkt}(\text{phi}, x_0, \text{maxitr}, \text{atol}, \text{rtol})$$

welche eine Fixpunktiteration zu gegebener Fixpunktfunktion `phi` implementiert. Weiter sind `x0` ein Startwert, d.h.  $x^{(0)}$ , `maxitr` die maximale Anzahl von Iterationen und `atol` und `rtol` gegebene absolute und relative tolerance für das Abbruchkriterium (ABK3) aus der Vorlesung (Kap. 4, Seite 6):

$$\epsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*| \leq \text{atol} + \text{rtol}|x^{(k)}|$$

Als Referenzlösung  $x^*$  können Sie die letzte Iteration, d.h. wenn das Abbruchkriterium erfüllt ist, des Algorithmus benutzen. Die Funktion soll im Vektor `x` alle Glieder  $x^{(k)}$  zurückgeben.

*Hinweis:* Arbeiten Sie im Template `fixpunkt.m`.

**Bitte wenden!**

- c) Wenden Sie die `fixpunkt.m` Funktion auf die Fixpunktfunktionen  $\phi$  von a) an. Benutzen Sie  $x_0 = 0$ , `maxitr= 1000`, `atol=1e-10` und `rtol=1e-8`. Was beobachten Sie?

*Hinweis:* Verwenden Sie das Skript `fixpunktproblem.m`.

- d) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die die Konvergenzordnung  $p$  und die Konvergenzrate  $C$  obiger Fixpunktiteration  $\phi_1$  und  $\phi_2$  mit Startwert  $x_0 = 1$ , `maxitr= 1000`, `atol=1e-10` und `rtol=1e-8` berechnet.

*Hinweis:* Arbeiten Sie im Template `fixpunktkonvergenz.m` und verwenden Sie die in der Vorlesungen gezeigten Schätzer welche mit dem Fehler der  $k$ -ten Iteration  $\epsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*|$  die Konvergenzordnung und den Konvergenzrate durch

$$p = \frac{\log(\epsilon^{(k+1)}) - \log(\epsilon^{(k)})}{\log(\epsilon^{(k)}) - \log(\epsilon^{(k-1)})}, \quad C = \frac{\epsilon^{(k)}}{(\epsilon^{(k-1)})^p}$$

bestimmen.

### 3. Skalare nichtlineare Gleichung

Man berechne die positive Lösung der Gleichung

$$e^{2x} - \sin(x) = 2 \tag{1}$$

- a) mit Matlab's `fsolve`<sup>1</sup>;
- b) mit dem Bisektions-Verfahren;
- c) mit dem Newton-Verfahren;
- d) mit dem Newton-Verfahren wobei die benötigten Ableitungen durch finite Differenzen geschätzt werden;
- e) mit dem Sekanten-Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)}).$$

### 4. Newton Verfahren in mehreren Dimensionen

In mehreren Dimensionen ist das Newton Verfahren zur Lösung des Nullstellenproblems  $F(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , wie folgt definiert:

Hier ist  $x_0$  der Startwert,  $DF$  die Jacobi-Matrix der Funktion  $F$ , `nMax` die maximale Anzahl von Iterationen und `ATOL` und `RTOL` gegebene absolute und relative Toleranzen für das Abbruchkriterium (ABK3) (aus der Vorlesung).

<sup>1</sup><https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fsolve.html>

---

**Algorithm 1** Newton Method

---

**function** NEWTON(x0, F, DF, nMax, ATOL, RTOL)

Initialisierung:  $n = 1, x = x_0$

**while**  $n < nMax$  und  $\|DF(x)^{-1}F(x)\| > ATOL + RTOL\|x\|$  **do**

$\Delta x = -DF(x)^{-1}F(x)$

$x = x + \Delta x$

$n = n + 1$

**return**  $x$

---

- a) Vervollständigen Sie die MATLAB-Funktion `newton.m`, die den obigen Algorithmus implementiert.

*Hinweis:* Sie sollten niemals die Inverse  $DF(x)^{-1}$  explizit berechnen. Stattdessen sollten Sie das System  $DF(x)\Delta x = -F(x)$  lösen. (Es ist durchaus sinnvoll, sich zu überlegen wieso!)

- b) Betrachten Sie die Funktion  $F : D = [-1, 2]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 2 \\ ye^x - 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Ihrer Funktion aus a) alle Lösungen des Nullstellenproblems  $F(x, y) = 0$ .

*Hinweis:* Die Höhenlinien der Funktions-Komponenten können mit `hoehenlinien.m` zur Illustration gezeichnet werden.

## 5. Explizites und Implizites Euler-Verfahren

Für das Anfangswertproblem  $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$  ist ein Schritt des impliziten Euler-Verfahrens durch

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

definiert.

- a) Betrachten Sie folgendes AWP

$$\dot{y}(t) = -\lambda y(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Führen Sie (analytisch) einen Schritt (mit Schrittweite  $h$ ) mit dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren aus.

- b) Betrachten Sie folgendes AWP

$$\dot{y}(t) = -t(y(t))^2, \quad y(t_0) = y_0 > 0,$$

Führen Sie (analytisch) einen Schritt (mit Schrittweite  $h$ ) mit dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren aus.

**Bitte wenden!**

c) Lösen Sie das AWP

$$\dot{y}(t) = -20y(t), \quad y(0) = 1,$$

jeweils mit dem expliziten und impliziten Euler-Verfahren mit Schrittweiten  $h = 2^{-1}, \dots, 2^{-8}$  und Endzeit  $T = 1$ . Plotten Sie die Lösung für beide Verfahren und jede Schrittweite. Was beobachten Sie?

**Abgabe:** Online bis **Freitag**, den 13.05.2022 unter `sam-up.math.ethz.ch`.