

Serie 11

1. Stabilitäts-funktionen und Gebiete

a) Berechnen Sie die Stabilitäts-funktionen folgender Verfahren:

(i) Expliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(ii) Impliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

(iii) Heun Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(iv) Klassisches Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(v) Implizite Mittelpunktsregel

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Hinweis: (i) und (ii) wurde bereits in der Vorlesung berechnet.

b) Zeichnen Sie die Stabilitätsgebiete mit die MATLAB Funktionen `draw_stabfunc.m` für die Verfahren (i)-(v). Was beobachten Sie?

Bitte wenden!

- c) Bestimmen Sie auf mindesten fünf Stellen genau die Stabilitätsintervalle für die Verfahren (i)-(v).

Hinweis: Sie können im Template `stab_klassisches_RK.m` arbeiten und die MATLAB Funktion `fsolve` für (iv) verwenden.

- d) Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (-1000 + \pi i)y(t) \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Geben Sie sinnvolle Grenzen für die Schrittweite h an, so dass die Verfahren (i)-(v) den qualitativen Verlauf der exakten Lösung folgen.

Hinweis: Sie können im Template `grenzen_schrittweite_h.m` arbeiten und die MATLAB Funktion `fsolve` für (iv) verwenden.

- e) Zeichnen Sie den Realteil und den Imaginärteil der Lösung $y(t)$ aus d).

Hinweis: Sie können im Template `schnelle_oszillation_verfall.m` arbeiten.

2. Stabilitäts-funktionen für RK-ESV

- a) Zeigen Sie, dass die Stabilitätsfunktion eines expliziten RK-ESVs immer ein Polynom ist .
- b) Kann ein explizites RK-ESV A-stabil sein?

3. L-Stabil

Ist die implizite Mittelpunkts-Methode L-stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Beispiel (3) aus Kapitel 5 der Vorlesung.

4. Lineare Mehrschrittverfahren : BDF-Verfahren

In dieser Aufgabe befassen wir uns weiter mit sog. Mehrschrittverfahren, welche wir bereits in Aufgabe 4 der Serie 9 kennengelernt haben. Lineare Mehrschrittverfahren haben die Form

$$\sum_{l=0}^k \alpha_l y_{j+1-l} = h \sum_{l=0}^k \beta_l f_{j+1-l}.$$

Hier bezeichnet $y_{j+1-l} \approx y(t_{j+1-l})$ die Approximation der Lösung eines geg. Anfangswertwertproblem (AWP) zur Zeit t_{j+1-l} , $f_{j+1-l} \approx f(t_{j+1-l}, y_{j+1-l})$ die Auswertung der rechten Seite Funktion f und α_l, β_l Koeffizienten. Der Einfachheit halber

Siehe nächstes Blatt!

nehmen wir auch hier wieder eine konstante Schrittweite h an, d.h. $t_j = t_0 + j h$ ($j = 0, 1, \dots$).

Spezialfälle der Koeffizientenwahl beschreiben folgende Verfahren:

- Adams-Bashforth (AB):

- $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, und $\alpha_l = 0$ für $l > 1$,
- $\beta_0 = 0$.

Da $\beta_0 = 0$ sind die Verfahren explizit. AB2 ($k = 2$) hatten wir in Aufgabe 4 der Serie 9 konstruiert.

- Adams-Moulton (AM):

- $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -1$, und $\alpha_l = 0$ für $l > 1$,
- $\beta_0 \neq 0$.

Da $\beta_0 \neq 0$ sind diese Verfahren implizit.

- Rückwärtsdifferenzenmethoden (Backward Differencing Methods (BDF)):

- $\beta_0 \neq 0$ und $\beta_l = 0$ für $l \geq 1$

Da $\beta_0 \neq 0$ sind diese Verfahren implizit.

BDF Methoden werden oft auf steife AWP angewendet. Die Idee eines k -Schritt BDF Verfahren (kurz BDF k) ist die rechte Seite Funktion f nur am neuen Zeitschritt (t_{j+1}, y_{j+1}) auszuwerten. Dies wird gleichgesetzt mit einer Approximation der Ableitung zur Zeit t_{j+1} , welche man mit Interpolation von $y_{j+1}, y_j, \dots, y_{j+1-k}$ bestimmt (ganz analog zu finiten Differenzen, welche wir in Aufgabe 4 der Serie 2 gesehen haben). Es soll nun BDF2 gebaut werden:

- Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p_2(t)$ durch (t_{j+1}, y_{j+1}) , (t_j, y_j) und (t_{j-1}, y_{j-1}) .
- Bestimmen Sie mittels a) eine Approximation der Ableitung der Lösung y zur Zeit t_{j+1} (d.h. berechnen Sie $\dot{p}_2(t_{j+1})$).
- Setzen Sie die Approximation der Ableitung $\dot{y}(t_{j+1})$ gleich der rechten Seite Funktion ausgewertet bei (t_{j+1}, y_{j+1}) und bestimmen Sie die Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ und β_0 von BDF2. Normieren Sie $\alpha_0 = 1$.

Hinweis : Beispiel (10) in Kap. 5 der Vorlesungsnotizen.

Abgabe: Online bis **Freitag**, den 20.05.2022 unter `sam-up.math.ethz.ch`.