

Lösung 12

1. Lineares homogenes System

a) Diagonalisieren die Matrix A als:

$$A = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}AP,$$

wo

$$P = \begin{bmatrix} 15 & -12 & 1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{4}{75} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{3}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

Sei $\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{y} \iff \mathbf{y} = P\mathbf{z}$ und beachten Sie das

$$\dot{\mathbf{z}} = P^{-1}\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}A\mathbf{y} = P^{-1}AP\mathbf{z} = D\mathbf{z}.$$

Wir haben jetzt drei entkoppelte ODEs, wo die Lösung gegeben ist

$$z_i(t) = z_i(0)e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, 3.$$

Wir haben

$$\mathbf{z}(0) = P^{-1}\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{4}{75} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{3}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{30} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Deshalb

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(0)e^{\lambda_1 t} = \frac{14}{30}e^{-\frac{1}{2}t}. \\ z_2(t) &= z_2(0)e^{\lambda_2 t} = \frac{1}{2}e^{-15t}. \\ z_3(t) &= z_3(0)e^{\lambda_3 t} = 0e^{-1000t} = 0. \end{aligned}$$

Dann ist gilt

$$\mathbf{y}(t) = P\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} 15 & -12 & 1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{14}{30}e^{-\frac{1}{2}t} \\ \frac{1}{2}e^{-15t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7e^{-\frac{1}{2}t} - 6e^{-15t} \\ 6e^{-15t} \\ 2e^{-15t} \end{bmatrix}.$$

Bitte wenden!

- b) Siehe `linsys.m`. Beachten Sie dass globale Diskretisierungsfehler divergiert, während die Schrittgröße größer ist als die maximal zulässige Schrittgröße aufgrund des Stabilitätsintervalle.

Für das verbesserte Euler-Verfahren haben wir

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_j, y_j) = \lambda y_j, \\k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right) = \lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j\right).\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}y_{j+1} &= y_j + hk_2 = y_j + h\lambda\left(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j\right) \\&= \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2\right)y_j\end{aligned}$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitäts funktion

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2.$$

Für $z = h\lambda$, von Teil 1.c) (iii). wir haben das

$$-2 < h\lambda < 0.$$

Das Worst-Case-Szenario ist, $\lambda = \lambda_3 = -1000$. Dann wir haben

$$-2 < h\lambda < 0 \iff 0 < 1000h < 2 \iff 0 < h < \frac{1}{500}.$$

Wenn wir im Stabilitätsintervall sind, d.h. $h < \frac{1}{500}$, konvergiert die Methode, und außerdem konvergiert sie mit der erwarteten Ordnung, die $p = 2$ ist. Siehe Abbildung 1.

Beachten Sie, dass die wahre Lösung $y(t)$ nicht den $\lambda_3 = -1000$ Eigenwert enthält, was darauf hindeutet, dass wir es bei der numerischen Lösung für $y(t)$ ignorieren können. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die numerische Lösung nicht exakt ist und somit der Beitrag aus diesem Eigenwert die anderen Modi im numerischen Fall beeinflussen wird. Es ist also notwendig, diesen Eigenwert zu berücksichtigen, um sicherzustellen, daß die numerische Approximation korrekt die wahre Lösung darstellt.

2. Steifes nichtlineares AWP

Siehe nächstes Blatt!

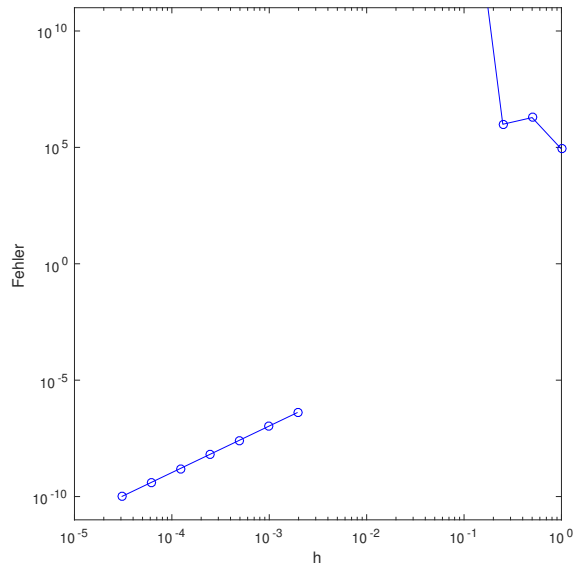


Abbildung 1: Konvergenz der verbesserten Euler-Methode für ein System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen 2 b).

- a) Zunächst müssen wir die Van der Pol-Gleichung umschreiben in ein System erster Ordnung:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

wobei

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \mu(1 - y_0^2(t))y_1 - y_0 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangswerte sind dann $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 = [2, 0]^T$.

Lassen wir `StiffVanDerPol.m` laufen, so beobachten wir, dass der explizite Löser `ode45` viel länger braucht als der implizite `ode23s`. In Abb. 2 sehen wir den Grund dafür: `ode45` macht $\sim 10^4$ mal kleinere Schritte als `ode23s` wo die Lösung glatt ist (d.h. wenig variiert)! Also obwohl ein Schritt mit dem impliziten Verfahren `ode23s` massiv teurer ist, gewinnt man viel an Rechenzeit verglichen mit dem expliziten Löser `ode45` der sehr viele kleine Schritte (aus Stabilitätsgründen) machen muss.

- b) Da die Van der Pol Diff.-Gl. nichtlinear ist, müssen wir wie in den Vorlesungsnotizen (Kap. 5 Seite 14) linearisieren. Die Jacobi Matrix von $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ lautet

$$J(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu y_0(t)y_1(t) - 1 & \mu(1 - y_0^2(t)) \end{pmatrix}.$$

Setzen wir die Anfangszeit $t_0 = 0$ und die AWe ein, erhalten wir

$$J(t_0, \mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3000 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

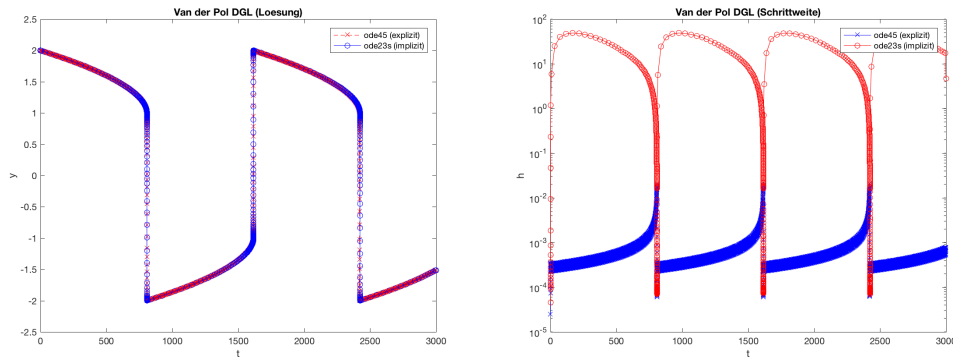


Abbildung 2: Lösung $y(t)$ links und Schrittweite h rechts.

Die Eigenwerte dieser Matrix berechnet man sehr einfach zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3000 \pm \sqrt{8999996}}{2}.$$

Damit lautet der Steifigkeitsparameter

$$S = \frac{\max_{i=1,\dots,n} |\operatorname{Re} \lambda_i|}{\min_{i=1,\dots,n} |\operatorname{Re} \lambda_i|} \approx 9 \times 10^6 \gg 1$$

Somit erwarten wir ein um den Punkt (t_0, y_0) lokal steifes Problem.

- c) In Abb. 3 ist der Steifigkeitsparameter S als Funktion der Zeit gezeichnet. Wir beobachten, dass die Lösung hin und her oszilliert zwischen sehr steifen ($S \gg 1$) und nicht steifen Verhalten. Somit ist klar, dass bei nichtlinearen Problemen sowohl steife als auch nicht steife Abschnitte auftreten können. Weiter erklärt die Abb. wieso der explizite Löser so kleine Schrittweiten machen muss.

3. Imaginäre Eigenwerte

Es fällt auf, dass die Lösung mit dem Heun Verfahren wächst (s. Abb. 4). Der Grund hierfür ist, dass die imaginäre Achse (bis auf den Ursprung) nicht im Stabilitätsgebiet enthalten ist (s. Abb. 5 links). Deshalb verstärken sich bei diesem Verfahren die Diskretisierungsfehler unbeschränkt Dies ist natürlich problematisch für lange Zeitintervalle!

Beim klassischen Runge-Kutta (RK4) Verfahren hingegen sind Teile der imaginären Achse im Stabilitätsgebiet enthalten (s. Abb. 5 rechts). Es ist also kein unbeschränkter Wachstum zu erwarten.

Im Skript sind auch andere Verfahren implementiert: experimentieren Sie ungeniert!

Siehe nächstes Blatt!

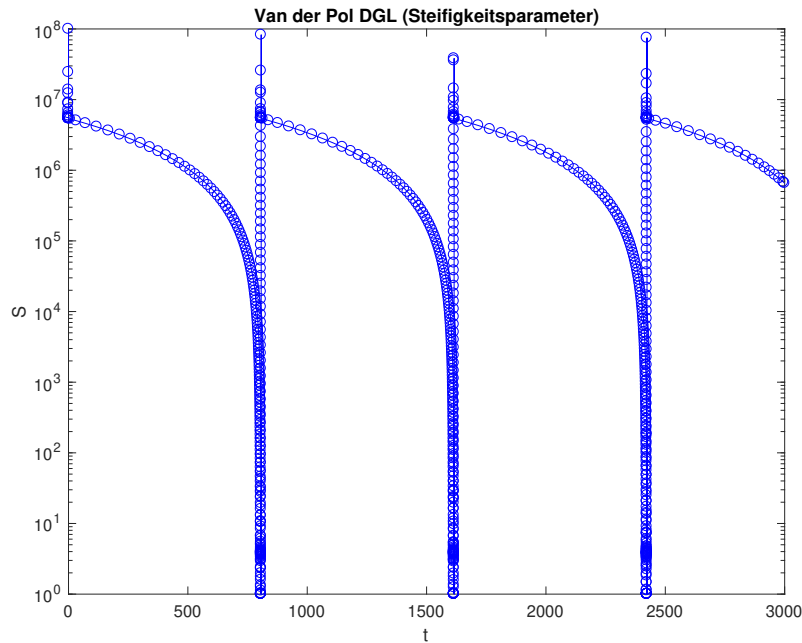


Abbildung 3: Stefigkeitsparameter als Funktion der Zeit.

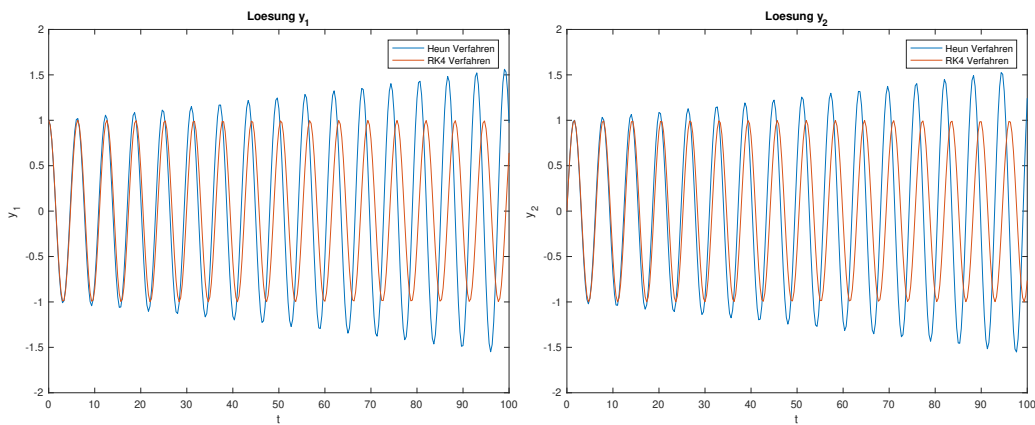


Abbildung 4: Numerische Lösung des Anfangswertproblems.

4. Wärmeleitungsgleichung

Das schnellste Verfahren ist die implizite Mittelpunktsregel.

Erklärung: Es ist klar, dass die expliziten Verfahren (expliziter Euler und ode45) ab einer gewissen Anzahl Gitterpunkte M Probleme haben werden da die Eigenwerte der DGL-System Matrix proportional zu $1/\Delta x^2$ ($\Delta x = 1/M$) skalieren (s. VL): Absolute Stabilität verlangt dann einen Zeitschritt proportional zu Δx^2 . Matlab's ode23s Verfahren ist schneller als die expliziten Verfahren erst ab etwa $M \gtrsim 150$. Bei der speziell implementierten impliziten Mittelpunktsregel nutzen wir die Struktur des Problems

Bitte wenden!

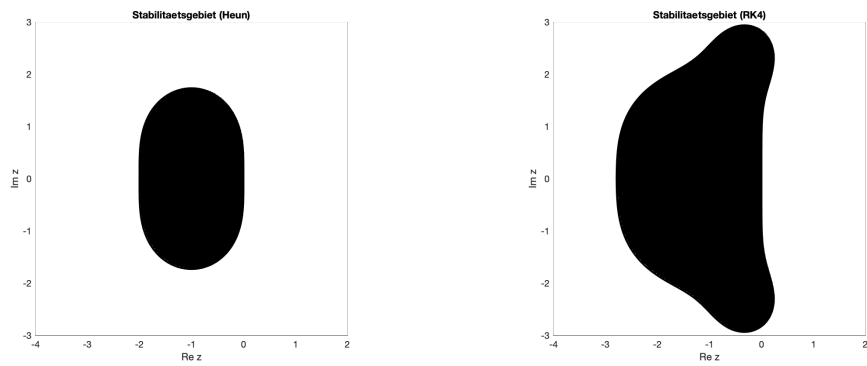


Abbildung 5: Stabilitätsgebiete des Heun (links) und des klassischen Runge-Kutta (RK4) (rechts) Verfahren.

aus: wir verwenden einen iterativen Löser für die linearen Gleichungssysteme (das sog. Verfahren der konjugierten Gradienten oder einfach nur CG-Verfahren (conjugate gradients)). Die letzteren Details gehen natürlich über den Vorlesungsstoff hinaus.