Dr. R. Käppeli D-ITET, D-MATL Sommer 2018

Prüfung Numerische Methoden

Wichtige Hinweise

- Die Prüfung dauert 90 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: 5 A4-Blätter doppelseitig (=10 Seiten) eigenhändig und handschriftlich verfasste Zusammenfassung, nicht ausgedruckt, nicht kopiert. Sonst keine Hilfsmittel zugelassen.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Unbegründete Lösungen (außer bei Multiple-Choice-Aufgaben falls nicht explizit gefordert) werden nicht akzeptiert!

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Prüfung	Numerische Methoden	
Datum	21.08.2018	

1	2	3	4	5	Punkte
10	14	12	10	8	54

- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch. Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift. Verwenden Sie einen Stift mit blauer oder schwarzer Farbe (keinesfalls rot oder grün).
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben:

1. *Wahr oder Falsch* [**10 Punkt(e)**]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
$\times$	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen $\times$ erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt **2 Punkte**, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt **-2 Punkte**. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
1) Gegeben folgendes Butcher-Tableau eines Runge-Kutta Einschrittverfahrens: $$\begin{array}{c\|cc} \gamma & \gamma & \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}, \quad \text{mit } \gamma = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$ Dieses Verfahren ist implizit und für ein skalares Anfangswertproblem muss man in jedem Schritt zwei skalare (möglicherweise nichtlineare) Gleichungen lösen.		
2) Gegeben die Stützstellen $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ und die Stützwerte $y_0 = 1,\ y_1 = 2,\ y_2 = 4$. Das zugehörige Interpolationspolynom ist eindeutig gegeben durch $$p(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x(x-1).$$		
3) Gegeben eine Quadraturregel $Q[f]$ mit Genauigkeitsgrad $q = 3$. Dann integriert die summierte Quadraturregel $Q^N[f]$ (basierend auf $Q[f]$) das folgende Integral $$\int_0^1 (x^3 + x^{5/2} + x^2 + x^{3/2} + x + x^{1/2})dx$$ für $N \geq 1$ exakt.		

Bitte wenden!

		wahr	falsch
4)	Das folgende Anfangswertproblem genügt den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf: $$\dot{y}(t) = e^{\frac{1}{y(t)-2}},\ y(t_0) = 2,\ t_0 = 4.$$		
5)	Das folgende Anfangswertproblem wird für kleine $\varepsilon > 0$ beliebig steif: $$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{b},$$ $$\mathbf{y}(t_0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ +\pi \end{pmatrix},$$ wobei $t_0 = \sqrt{2},\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & \varepsilon^2 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.		

Siehe nächstes Blatt!

2. *Konsistenzordnung und Stabilitätsfunktion* **[14 Punkt(e)]**

Wir betrachten folgende Familie von Einschrittverfahren

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2\alpha} f(t_j, y_j) + h(1 - \frac{1}{2\alpha}) f(t_j + \alpha h, y_j + \alpha h f(t_j, y_j)).$$

Hierbei ist α ein Parameter.

a) **[1 Punkt(e)]** Schreiben Sie dieses Verfahren in der Form eines Butcher-Tableaus.

b) **[6 Punkt(e)]** Bestimmen Sie alle möglichen Werte des Parameters α damit das resultierende Verfahren genau Konsistenzordnung zwei hat.

c) **[2 Punkt(e)]** Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion der oder des Verfahren aus **b)**.

d) **[3 Punkt(e)]** Bestimmen Sie das Stabilitätsintervall der oder des Verfahren aus **b)**.

Welche Werte kann die Schrittweite annehmen, um das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = -\lambda y(t)$, $y(0) = 1$ mit $\lambda > 0$ stabil zu lösen?

e) **[2 Punkt(e)]** Um das folgende Anfangswertproblem zu lösen,

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -1000 y(t), \\ y(0) &= 10, \end{aligned}$$

verwenden wir das Verfahren mit $\alpha = \frac{1}{2}$. Geben Sie Werte für den Zeitschritt h so an, dass die Lösung immer positiv ist.

Bitte wenden!

3. *Gauss-Lobatto Quadratur* **[12 Punkt(e)]**

Wir betrachten eine sog. 3-Punkte Gauss-Lobatto Quadraturregel über dem Referenzintervall $[-1, 1]$ der Form

$$GL_2[f] := w_0 f(-1) + w_1 f(x_1) + w_2 f(+1)$$

Aus Symmetrieüberlegungen wissen wir, dass der mittlere Knoten durch $x_1 = 0$ gegeben ist.

a) **[3 Punkt(e)]** Bestimmen Sie die Gewichte w_0, w_1, w_2 so, dass die Quadraturregel Genauigkeitsgrad $q = 3$ hat.

b) **[1 Punkt(e)]** Was ist die Konvergenzordunung von $GL_2[f]$?

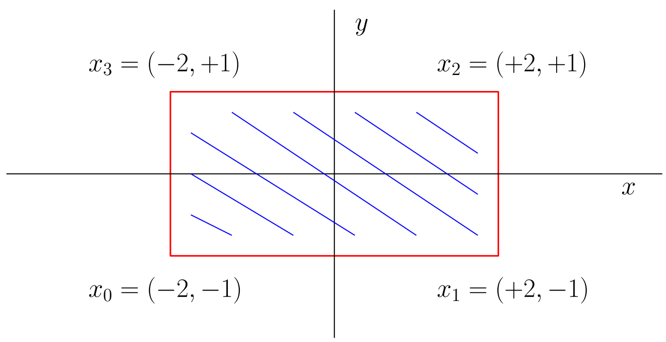
c) **[2 Punkt(e)]** Bestimmen Sie eine Näherung von

$$I[x + x^3 + x^4] = \int_{-1}^{+1} (x + x^3 + x^4)\, dx = \frac{2}{5}$$

mittels der summierten Quadraturregel $GL_2^N[f]$ mit $N = 1$ und $N = 2$ (die Teilintervalle sollen gleich gross sein).

d) **[2 Punkt(e)]** Berechnen Sie den Quadraturfehler für $GL_2^1[x + x^3 + x^4]$ und $GL_2^2[x + x^3 + x^4]$ aus **c)**. Ist die Fehlerreduktion konsistent mit der Konvergenzordunung der Quadraturregel? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) **[4 Punkt(e)]** Berechnen Sie näherungsweise das Doppelintegral der Funktion $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2$ über dem unten abgebildeten Quadrat (mit Ecken x_0, x_1, x_2, x_3) mit einer Quadraturregel basierend auf $GL_2[f]$.



Was können Sie über die Genauigkeit Ihres Resultats aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Siehe nächstes Blatt!

4. *Optimierungsproblem* **[10 Punkt(e)]**

Die Energiekosten eines Fertigungsprozesses werden durch folgende Funktion beschrieben

$$f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 + 2(x_2 - x_1) + 2.$$

Hier sind x_1 und x_2 zwei Parameter über welche der Prozess kontrolliert werden kann. Da die Produktionsmenge unabhängig von x_1 und x_2 ist, wollen wir natürlich die Energiekosten minimieren.

a) **[3 Punkt(e)]** Die optimalen Parameter sollen mit dem Newton-Verfahren iterativ bestimmt werden. Berechnen Sie alle Komponenten welche benötigt werden um das Newton-Verfahren anzuwenden.

b) **[5 Punkt(e)]** Vervollständigen Sie folgende MATLAB Implementierung des Newton-Verfahrens für das Problem aus **a)**:

```
function [x, niter] = newton_optimization(x0, max_iter, tol)

% Parameters: x0       ... Startwert fuer Parameter
%             max_iter ... maximale Anzahl von Iterationen
%             tol      ... Toleranz
%
% Returns: x     ... Optimale Parameter
%          niter ... Anzahl der Iterationen f\"ur Konvergenz

  %Initialisierung
  x = x0;

  %Komponenten im Newton-Verfahren





  for i=1:max_iter

    x_old =

    %Compute update
    s =

    %Abbruchkriterium
    if (                                        )
      break
    end

    %Update iteration
    x = x_old - s

  end
```

Bitte wenden!

```
    niter =

end
```

Verwenden Sie die folgende Box, um zusätzliche Funktionen zu implementieren. Sie können davon ausgehen, dass der Inhalt dieser Box in der selben Datei wie obige Box steht.

c) **[2 Punkt(e)]** Was ist der Wert von `niter` nach folgendem Aufruf

```
[x, niter] = newton_optimization([12; -0.3], 1000, 1.e-8)
```

Begründen Sie Ihre Antwort.

Siehe nächstes Blatt!

5. *Kurze Fragen aus den Übungen* **[8 Punkt(e)]**

a) [2 Punkt(e)] Skizzieren Sie folgendes Verfahren im Richtungsfeld

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_j, y_j\right), \\ k_2 &= f\left(t_j + h, y_j + hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{4}\left(k_1 + k_2\right)\right), \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{6}\left(k_1 + k_2 + 4k_3\right). \end{aligned}$$

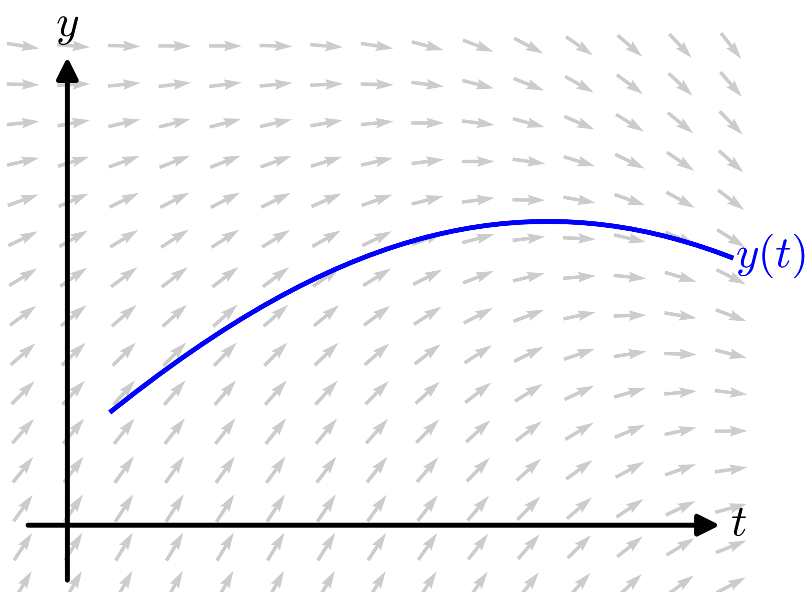


Abbildung 1 – Richtungsfeld für **(a)**.

b) [2 Punkt(e)] Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion für das implizite Mittelpunkts-Verfahren

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}.$$

c) [2 Punkt(e)] Betrachten Sie das Nullstellenproblem

$$f(x) = xe^x - 1 = 0$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ und die Fixpunktiteration

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \phi(x^{(k)}), \\ \phi(x) &= \frac{x^2 e^x + 1}{e^x(x+1)}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das Fixpunktproblem konsistent mit dem Nullstellenproblem ist.

Bitte wenden!

d) [2 Punkt(e)] Ist das klassische Runge-Kutta Verfahren,

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array},$$

autonomisierungsinvariant? Begründen Sie Ihre Antwort.