

Prüfung Numerische Methoden

Name :

Vorname :

Legi-Nummer :

Studiengang :

Datum : 22.08.2020

1	2	3	4	5	Punkte
10	15	10	10	5	50

Wichtige Hinweise

- Die Prüfung dauert 90 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: 5 A4-Blätter doppelseitig (=10 Seiten) eigenhändig und handschriftlich verfasste Zusammenfassung, nicht ausgedruckt, nicht kopiert. Sonst keine Hilfsmittel zugelassen.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Unbegründete Lösungen (ausser bei Multiple-Choice-Aufgaben falls nicht explizit gefordert) werden nicht akzeptiert!
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch. Schalten Sie Ihr Handy aus.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift. Verwenden Sie einen Stift mit blauer oder schwarzer Farbe (keinesfalls rot oder grün).
- Versuchen Sie Ihren Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- **Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt!**

Viel Erfolg!

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben:

1. Wahr oder Falsch [10 Punkt(e)]

Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen × erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt **2 Punkte**, falsch gesetzte Kreuzchen geben *keine* negative Punkte.

Bitte wenden!

	wahr	falsch
<p>1) Das folgende Anfangswertproblem (AWP)</p> $\dot{y}(t) = 2\sqrt{ y }, \quad y(0) = 0$ <p>für $t \in [0, \infty)$ besitzt die beiden Lösungen $y(t) = 0$ und $y(t) = t t$. Deshalb genügt das AWP dem Satz von Picard-Lindelöf.</p>		
<p>2) Das explizite Euler Verfahren gehört zur Familie der Runge-Kutta Einschrittverfahren und das zugehörige Butcher-Tableau ist</p> $\begin{array}{c c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$		
<p>3) Nur lineare Anfangswertprobleme können steif sein.</p>		
<p>4) Wir approximieren das Integral</p> $I[\sqrt{x}] = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx$ <p>mit der summierten Simpson-Regel mit N Teilintervallen $Q_2^N[\sqrt{x}]$. Da die Simpson-Regel Genauigkeitsgrad $q = 3$ hat, erwarten wir einen Fehler der Form</p> $E^N[\sqrt{x}] = I[\sqrt{x}] - Q_2^N[\sqrt{x}] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right)$ <p>für N gross genug.</p>		
<p>5) Falls das Bisektion-Verfahren gegen eine Nullstelle konvergiert, tut es dies mit linearer Konvergenzordnung.</p>		

Siehe nächstes Blatt!

2. Fragen aus den Übungen [15 Punkt(e)]

a) [4 Punkt(e)] (Serie 1, Aufgabe 2)

Gegeben ist die Quadraturregel

$$Q[f] = \sum_{j=0}^2 \omega_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx = I[f],$$

mit Knoten

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b.$$

i) Berechnen Sie die Lagrange-Polynome $L_0^2(x)$, $L_1^2(x)$ und $L_2^2(x)$ passend zu den Knoten x_0 , x_1 und x_2 .

ii) Berechnen Sie mit i) die Quadratur Gewichte ω_0 , ω_1 und ω_2 .

b) [2 Punkt(e)] (Serie 5, Aufgabe 4)

Autonomisieren Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t) + \cos(t)e^{-t}, \\ y(0) &= 7. \end{aligned}$$

c) [4 Punkt(e)] (Serie 7, Aufgabe 3)

Geben Sie für das folgende Runge-Kutta Einschrittverfahren an ob es (i) explizit oder implizit ist, (ii) das zugehörige Butcher-Tableau und (iii) skizzieren Sie das Verfahren im Richtungsfeld:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j), \\ k_2 &= f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f(t_j + h, y_j + hk_2), \\ k_4 &= f(t_j + h, y_j + hk_3), \\ y_{j+1} &= y_j + h\left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_4\right). \end{aligned}$$

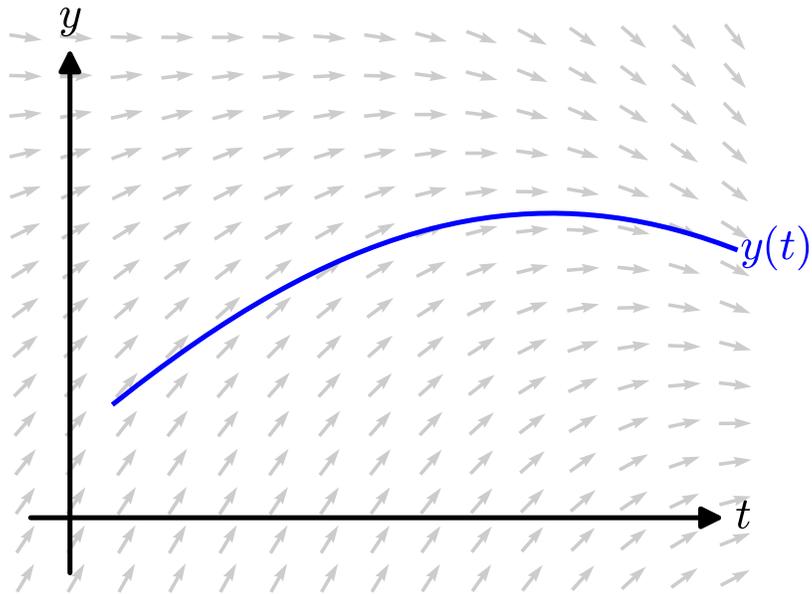
Schreiben Sie Ihre Antworten direkt hier:

(i)

(ii)

(iii) Richtungsfeld:

Bitte wenden!



d) [2 Punkt(e)] (Serie 8, Aufgabe 3)

Ist das folgende Verfahren autonomisierungsinvariant?

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & & \\ \frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \\ \hline 9 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

e) [3 Punkt(e)] (Serie 12, Aufgabe 1)

Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des Verfahrens von Heun

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Konsistenzordnung [10 Punkt(e)]

Wir betrachten folgendes Butcher-Tableau eines zweistufigen Runge-Kutta Einschrittverfahrens (ESV), wobei a , b_1 und b_2 Parameter sind.

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ a & a \\ \hline & b_1 \quad b_2 \end{array} \quad (1)$$

- a) [1 Punkt(e)] Schreiben Sie das gegebene ESV (1) in Stufenform um.
- b) [6 Punkt(e)] Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des ESVs (1) als Funktion der Parameter a , b_1 und b_2 .
Hinweis: Ein zweistufiges explizites ESV hat höchstens Konsistenzordnung $p = 2$.
- c) [3 Punkt(e)] Bestimmen Sie alle möglichen Parameter a , b_1 und b_2 , damit das ESV Konsistenzordnung $p = 2$ hat.

4. Stabilität und Steifigkeit [10 Punkt(e)]

Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP) bestehend aus den gekoppelten Differentialgleichungen (DGL)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\varepsilon y_1 + \frac{1}{\varepsilon} y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{1}{\varepsilon} y_2 \end{aligned} \quad (2)$$

und den Anfangswerten (AW)

$$y_1(0) = \sqrt{2}, \quad y_2(0) = \pi. \quad (3)$$

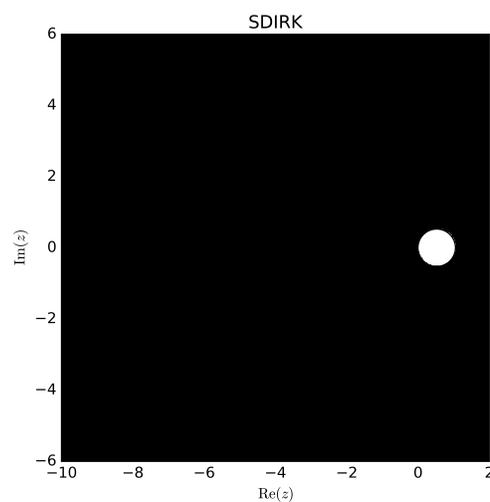
Hier ist $\varepsilon > 0$ ein positiver Parameter und das AWP soll im Zeitintervall $t \in [0, 1000]$ gelöst werden.

Zur numerischen Lösung des AWP (2)-(3) soll folgendes Einschrittverfahren (ESV) verwendet werden

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & & \gamma \\ \hline 1 - \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad (4)$$

Hier ist γ ein Parameter der nicht relevant für die folgenden Teilaufgaben ist.

- [3 Punkt(e)]** Ist das AWP (2)-(3) global steif für beliebig kleine Parameter $\varepsilon > 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- [5 Punkt(e)]** Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des ESV (4).
- [2 Punkt(e)]** Das Stabilitätsgebiet (schwarzes Gebiet) des ESVs (4) ist in der folgenden Abbildung skizziert:



Siehe nächstes Blatt!

Ist das ESV (4) geeignet um das AWP (2)-(3) mit $\varepsilon = 10^{-2}$ für $t \in [0, 1000]$ und mit einer Schrittweite von $h = \frac{1}{20}$ zu lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Falls Sie **a)** nicht gelöst haben: Ist das ESVs (4) geeignet um das folgende AWP

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -1000y(t), \\ y(0) &= 1\end{aligned}$$

für $t \in [0, 1]$ mit einer Schrittweite von $h = 10^{-3}$ zu lösen?

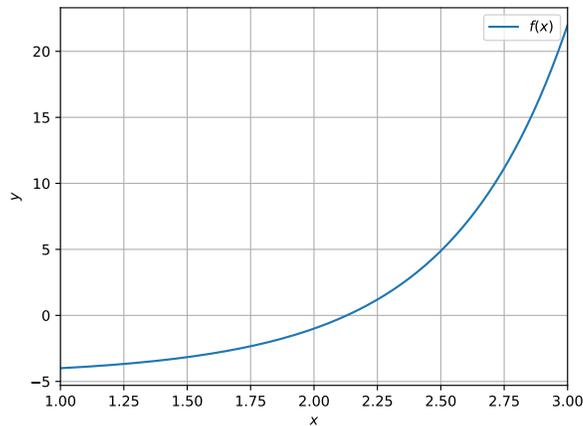
Bitte wenden!

5. Nullstellensuche [5 Punkt(e)]

Wir betrachten folgende skalare nicht-lineare Gleichung

$$f(x) = x^x - 5 = 0. \quad (5)$$

Aus dem folgenden Graphen schliessen wir, dass eine Lösung im Intervall $[1, 3]$ existiert:



- a) [2 Punkt(e)] Schlagen Sie eine zweckmässige Methode vor um (5) näherungsweise zu lösen. Geben Sie alle nötigen Komponenten der von Ihnen gewählten Methode an.
- b) [3 Punkt(e)] Implementieren Sie Ihre in a) vorgeschlagene Methode in MATLAB. Als Abbruchkriterium soll ein absolutes Kriterium $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < atol$ verwendet werden. Die Iteration soll abgebrochen werden falls das Abbruchkriterium innert $N_{\max} = 100$ noch nicht erreicht wurde.
Verwenden Sie folgendes Template für die Implementierung.

Siehe nächstes Blatt!

```
% Die Funktion deren Nullstelle wir suchen
```

```
f = @(x) x^x - 5;
```

```
% Abbruchkriterium Toleranz und maximale Anzahl Iterationen
```

```
atol = 1.e-6;
```

```
Nmax = 100;
```