Grundstrukturen

Serie 0

formale Beweise

Besprechung am 02. März 2022

---

0. (a) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$

(b) $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$

(c) $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ (duplex negatio affirmat)

(d) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \psi)$

(e) $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (Kontraposition)

(f) $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$ (ex falso quodlibet)

1. Sei $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ das Axiomenschema

$$(\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big).$$

(a) Zeige, dass gilt: $\{\mathsf{L}_0, \mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_8, \mathsf{L}_9\} \vdash \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$

(b) Zeige, dass gilt: $\{\mathsf{L}_1, \mathsf{L}_2, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\} \vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

2. Zeige, dass die Gleichheitsrelation “$=$” transitiv ist, d.h. zeige, dass gilt:

$$\vdash \forall x \forall y \forall z \big((x = y \wedge y = z) \to x = z\big)$$

3. Sei T eine Theorie. Zeige das Prinzip eines *Widerspruchbeweises*, d.h. zeige, dass wenn aus $\mathsf{T}+\varphi$ ein Widerspruch folgt, dass dann $\neg\varphi$ aus T beweisbar ist. Mit anderen Worten, zeige, dass gilt:

$$\mathsf{T} + \varphi \vdash \psi \wedge \neg\psi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{T} \vdash \neg\varphi$$

α. Sei $\mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$ wieder das Axiomenschema

$$(\varphi \to \psi) \to \big((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi\big)$$

und sei $\mathsf{L}_{9\frac{1}{4}}$ das Axiomenschema

$$\neg\neg\varphi \to \varphi.$$

(a) Zeige, dass gilt: $\{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}, \mathsf{L}_{9\frac{1}{4}}\} \vdash \mathsf{L}_0$

(b) Zeige, dass gilt: $\{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9\} \nvdash \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}$

(c) Zeige, dass gilt: $\{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\} \nvdash \mathsf{L}_{9\frac{1}{4}}$

(d) Zeige, dass gilt: $\{\mathsf{L}_1\text{–}\mathsf{L}_9, \mathsf{L}_{9\frac{3}{4}}\} \nvdash \mathsf{L}_0$

Stichworte für (b)–(d): 3-wertige Logik