# Grundstrukturen

Serie 1

formale und semi-formale Beweise

Besprechung am 09. März 2022

---

**4.** $\mathsf{PA} \vdash \mathtt{s}0 + \mathtt{s}0 = \mathtt{ss}0$

**5.** $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(x = 0 \ \vee\ \exists y(x = \mathtt{s}y)\big)$

**6.** Zeige mit semi-formalen Beweisen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\mathsf{PA} \vdash \forall x(0 + x = x)$

(b) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big((x + y) + z = x + (y + z)\big)$

(c) $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathtt{s}0 + x = \mathtt{s}x \ \wedge\ \mathtt{s}x = x + \mathtt{s}0\big)$

(d) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y(x + y = y + x)$

**7.** Zeige mit semi-formalen Beweisen, dass die folgenden Aussagen gelten:

(a) $\mathsf{PA} \vdash \forall x(0 \cdot x = 0)$

(b) $\mathsf{PA} \vdash \forall x\big(\mathtt{s}0 \cdot x = x \ \wedge\ x = x \cdot \mathtt{s}0\big)$

(c) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big((x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)\big)$

(d) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$

(e) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big)$

(f) $\mathsf{PA} \vdash \forall x \forall y \forall z\big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\big)$

***β*.** (a) Jedes Linksinverse ist auch Rechtsinverses:

$\mathsf{GT} \vdash \forall x \forall y\big(x \circ y = \mathtt{e} \ \rightarrow\ y \circ x = \mathtt{e}\big)$

(b) Das Linksneutralelement ist auch Rechtsneutralelement:

$\mathsf{GT} \vdash \forall x(x \circ \mathtt{e} = x)$

(c) Das Neutralelement ist eindeutig:

$\mathsf{GT} \vdash \forall x\big(\forall y(x \circ y = y) \rightarrow x = \mathtt{e}\big)$

(d) Jedes Element hat genau ein Inverses:

$\mathsf{GT} \vdash \forall x \forall y \forall z\big((y \circ x = \mathtt{e} \ \wedge\ z \circ x = \mathtt{e}) \rightarrow y = z\big)$