Grundstrukturen

Serie 2

Modelle formaler Theorien

Besprechung am 16. März 2022

8. Sei R ein 2-stelliges Relationssymbol, sei $\mathscr{L} = \{R\}$ und seien σ_1, σ_2, σ_3 die folgenden drei $\mathscr{L}$-Sätze:

$$\sigma_1 \equiv \forall x(Rxx), \quad \sigma_2 \equiv \forall x \forall y(Rxy \to Ryx), \quad \sigma_3 \equiv \forall x \forall y \forall z\big((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz\big).$$

Konstruiere drei Modelle $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ mit Bereich $\{a, b, c\}$ sodass gilt:

(a) $\mathbf{M}_1 \models \neg\sigma_1 \wedge \ \sigma_2 \ \wedge \ \sigma_3$

(b) $\mathbf{M}_2 \models \ \sigma_1 \ \wedge \neg\sigma_2 \wedge \ \sigma_3$

(c) $\mathbf{M}_3 \models \ \sigma_1 \ \wedge \ \sigma_2 \ \wedge \neg\sigma_3$

9. Definiere auf $\mathbb{N}$ eine binäre Relation "$\prec$" sodass gilt:

$$(\mathbb{N}, \prec) \models \mathsf{DLO}$$

10. Für positive ganze Zahlen n sei $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, sei S_n die Menge aller Bijektionen $f : [n] \to [n]$ und für Funktionen $f, g \in S_n$ sei $f \circ g(a) := f\big(g(a)\big)$ (für $a \in [n]$). Weiter sei $\iota : [n] \to [n]$ die Identität, d.h. $\iota(a) = a$ für alle $a \in [a]$.

Zeige, dass für $n \geq 3$, $\big(S_n, \iota, \circ\big)$ eine nicht-kommutative Gruppe ist.

11. Sei $\mathbb{Z}[X]$ die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

Zeige, dass $\big(\mathbb{Z}[X], 0, 1, +, \cdot\big)$ ein kommutativer Ring ist, wobei $0, 1 \in \mathbb{Z}$ und $+, \cdot$ die Polynomaddition bzw. Polynommultiplikation bezeichnet.

12. Für eine positive ganze Zahl m sei $\mathbb{Z}_m := \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$. Auf $\mathbb{Z}_m$ seien die beiden binären Operationen "$+$" und "$\cdot$" wie folgt definiert:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} \ :\Longleftrightarrow \ m \text{ teilt } (a + b) - c$$
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{c} \ :\Longleftrightarrow \ m \text{ teilt } (a \cdot b) - c$$

(a) Zeige, dass für alle $m \geq 2$, $\big(\mathbb{Z}_m, \bar{0}, \bar{1}, +, \cdot\big)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Zeige, dass für Primzahlen p, $\big(\mathbb{Z}_p, \bar{0}, \bar{1}, +, \cdot\big)$ ein Körper ist.
Hinweis: Zeige, dass für $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, die Elemente $\bar{1} \cdot \bar{a}, \bar{2} \cdot \bar{a}, \ldots, \overline{p-1} \cdot \bar{a}$ paarweise verschieden und verschieden von $\bar{0}$ sind.

13. Auf der Menge $K = \{0, 1, \alpha, \beta\}$ werden zwei binäre Operationen "$+$" und "$\cdot$" wie folgt definiert:

$$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ \hline 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 0 & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta & 0 & 1 \\ \beta & \beta & \alpha & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \cdot & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \alpha & \beta & 1 \\ \beta & 0 & \beta & 1 & \alpha \end{array}$$

Zeige, dass $\mathbb{K} = \big(K, 0, 1, + \cdot\big)$ ein Modell für KT ist, d.h. $\mathbb{K}$ ist eine Körper mit vier Elementen.

14. Sei $\mathsf{T}_0 = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ eine Theorie mit der Signatur $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}}$, wobei gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &\equiv \forall x \forall y \forall z \big(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z\big) \\ \sigma_1 &\equiv \forall x (\mathsf{e} \circ x = x) \\ \sigma_2 &\equiv \forall x \exists y (x \circ y = \mathsf{e}) \end{aligned}$$

Die $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}}$-Struktur $\mathbf{M}$ mit Bereich $A = \{\alpha, \beta\}$ sei definiert durch $\mathsf{e}^{\mathbf{M}} := \alpha$ und $x \circ y := y$ für alle $x, y \in A$.

(a) Zeige: $\mathbf{M} \models \mathsf{T}_0$.

(b) Zeige: $\mathbf{M} \not\models \mathsf{GT}$.

Bemerkung: Ist $\mathbb{G}$ eine Gruppe, so gilt $\mathbb{G} \models \mathsf{T}_0$, d.h. die Axiome von T_0 können aus GT bewiesen werden. Andererseits folgt aus (b), dass die Gruppenaxiome GT nicht aus T_0 bewiesen werden können.

γ. ***Zur Existenz eines nicht-standard Modells von*** PA: Sei $\mathscr{L}^*_{\mathsf{PA}} := \mathscr{L}_{\mathsf{PA}} \cup \{\mathsf{c}\}$ wobei c ein Konstantensymbol ist. Weiter sei $\mathsf{PA}^* := \mathsf{PA} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$, wobei für jede natürlich Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\varphi_n \equiv \mathsf{c} > \underbrace{\mathsf{s} \cdots \mathsf{s}}_{n-\text{mal}} 0$$

(a) Zeige, dass jede endliche Teilmenge von PA^* ein Modell hat und schliesse daraus, dass auch PA^* ein Modell hat.

(b) Zeige, dass jedes Modell $\mathbf{N}$ von PA^* auch ein Modell von PA ist.

(c) Sei $\mathbf{N} \models \mathsf{PA}^*$. Zeige, dass dann $\mathsf{c}^{\mathbf{N}}$ eine unendlich grosse Zahl ist — $\mathbf{N}$ ist ein sogenanntes *nicht-standard Modell* von PA.

(d) Bestimme die Ordnungsstruktur eines abzählbaren nicht-standard Modells von PA.

Hinweis: Benutze, dass für jede positive natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \forall x \big(n \mid x \vee n \mid (x+1) \vee \cdots \vee n \mid (x+n-1)\big)$$

Zum Beispiel gilt für alle x: x oder $x+1$ ist gerade, d.h. $2 \mid x$ oder $2 \mid (x+1)$.