Grundstrukturen Serie 3

Konstruktion eines Modells $\mathbb{N}$ der Peano-Arithmetik

Die Menge ω, wie sie in der Vorlesung konstruiert wurde, hat folgende Eigenschaften (die sich aus den Axiomen 0–6 beweisen lassen):

(i) Für jedes $n \in \omega$ ist entweder $n = 0$ oder es existiert ein $m \in \omega$ mit $n = m + 1$, wobei $m + 1 := m \cup \{m\}$.

(ii) Die Menge ω ist durch $\in$ wohlgeordnet, d.h. $\in$ ist transitiv, es gilt Trichotomie (d.h. für alle $n, m \in \omega$ gilt entweder $n \in m$, oder $n = m$, oder $m \in n$), und jede nicht-leere Teilmenge $S \subseteq \omega$ hat ein $\in$-minimales Element (d.h. es existiert ein $n_0 \in S$, sodass für alle $m \in S$ gilt $m \notin n_0$).

15. Konstruiere aus den Axiomen 0–6 ein Modell $\mathbb{N}$ der Peano-Arithmetik mit Bereich ω.

Hinweise:

- Definiere $0^{\mathbb{N}} := 0$.
- Definiere $\mathrm{s}^{\mathbb{N}} := \big\{\langle m, n\rangle \in \omega \times \omega : n = m + 1\big\}$.
- Definiere die Funktion $+^{\mathbb{N}}$ mit dem Aussonderungsaxiom als Teilmenge des cartesischen Produkts $(\omega \times \omega) \times \omega$ durch

$$+^{\mathbb{N}} := \bigcap \big\{X \subseteq (\omega \times \omega) \times \omega : \varphi(X)\big\}$$

mit

$$\varphi(X) :\equiv \forall n, m, k \in \omega \Big(\big\langle\langle n, 0\rangle, n\big\rangle \in X \wedge \\ \big(\big\langle\langle n, m\rangle, k\big\rangle \in X \to \big\langle\langle n, m+1\rangle, k+1\big\rangle \in X\big)\Big).$$

- Ebenso definiere die Funktion $\cdot^{\mathbb{N}}$ mit dem Aussonderungsaxiom als Teilmenge des cartesischen Produkts $(\omega \times \omega) \times \omega$.

δ. (a) Konstruiere ein Modell $\mathbb{Z}$ für die ganzen Zahlen.

(b) Konstruiere ein Modell $\mathbb{Q}$ für die rationalen Zahlen.

Hinweis: Ganze Zahlen können als Äquivalenzklassen von geordneten Paaren aus $\omega \times \omega$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$\langle m, n\rangle \sim \langle m', n'\rangle :\Longleftrightarrow m + n' = m' + n$$

aufgefasst werden.