Grundstrukturen Serie 5

zum Auswahlaxiom Besprechung am 06. April 2022

---

20. Zeige, dass jede abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen abzählbar ist und erkläre, wieso im Beweis das Auswahlaxiom (bzw. eine Form davon) benötigt wird.

Bemerkung: In gewissen Modellen von ZF, in denen AC nicht gilt, ist

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \omega} R_n$$

mit R_n abzählbar für alle $n \in \omega$.

21. Seien (A) und (B) die folgenden Aussagen:

(A) Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums V enthält eine Basis von V.

(B) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Zeige die Aussagen (A) und (B) jeweils

(a) mit dem Kuratowski-Zorn Lemma,

(b) und mit dem Teichmüller Prinzip.

Bemerkung: Die Aussage (A) ist bzgl. den Axiomen $0-6$ äquivalent zu AC, und die Aussage (B) ist bzgl. ZF äquivalent zu AC; (A) ist also etwas stärker als (B).

22. Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$. Zeige, dass es eine *lineare Funktion* $f : V \to V$ gibt, welche *nirgends stetig* ist.

Hinweis: Sei $\{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ eine Basis des Vektorraums V. Definiere $f : V \to V$ mit $f(a_\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

ζ. In 100 Räumen sind je abzählbar unendlich viele Umschläge, jeweils nummeriert mit den natürlichen Zahlen. In jedem dieser Umschläge ist ein Zettel auf dem eine reelle Zahl steht, und zwar steht auf jedem der 100 Zettel in den Umschlägen mit der Nummer n dieselbe reelle Zahl r_n. Mit anderen Worten, die 100 Räume sind bezüglich der Umschläge und den Zetteln mit den reellen Zahlen identisch.

Nun wird mit 100 Mathematikerinnen folgendes Spiel gespielt: Nachdem sie Zeit gehabt haben zu diskutieren, werden sie gleichzeitig jeweils in einen der Räume geschickt, wo sie nicht mehr miteinander kommunizieren können. In den Räumen dürfen sie jeweils Umschläge öffnen und die reellen Zahlen auf den Zetteln anschauen; sie dürfen auch unendlich viele Umschläge öffnen, aber mindestens ein Umschlag muss ungeöffnet bleiben. Danach muss jede Mathematikerin von einem von ihr nicht geöffneten Umschlag erraten, welche reelle Zahl auf dem Zettel im Umschlag steht.

Damit sie das Spiel zusammen gewinnen, müssen 99 der 100 Mathematikerinnen die richtige Zahl erraten.

Wie können die Mathematikerinnen das Spiel gewinnen?