Grundstrukturen

Serie 6

Kardinalzahlen

Besprechung am 13. April 2022

---

23. (a) Sei $\mathscr{F}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Zeige: $|\mathscr{F}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

(b) Sei $\mathscr{C}$ die Menge aller stetigen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Zeige: $|\mathscr{C}| = \mathfrak{c}$.

24. Zeige in $\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH}$: Die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ lässt sich so in zwei Mengen A und B zerlegen (d.h. $A \cup B = \mathbb{R}^2$), dass Folgendes gilt:

- Jede Gerade $g_{y_0} = \big\{(x, y_0) : x \in \mathbb{R}\big\}$ parallel zur x-Achse schneidet die Menge A nur in abzählbar vielen Punkten, d.h. $|g_{y_0} \cap A| \leq \omega$.
- Jede Gerade $g_{x_0} = \big\{(x_0, y) : y \in \mathbb{R}\big\}$ parallel zur y-Achse schneidet die Menge B nur in abzählbar vielen Punkten, d.h. $|g_{x_0} \cap B| \leq \omega$.

Hinweis: Verwende eine Wohlordnung von $\mathbb{R}$.

25. Die Menge ${}^{\omega}\omega$ ist die Menge aller Funktionen $f : \omega \to \omega$. Für $f, g \in {}^{\omega}\omega$ definieren wir

$$g \leq^* f :\Longleftrightarrow \exists n \in \omega \, \forall k \geq n \, \big(g(k) \leq f(k)\big).$$

Gilt $g \leq^* f$, so wird g von f beschränkt.

Eine Familie $\mathscr{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ heisst **unbeschränkt** (unbounded), falls gilt:

$$\forall f \in {}^{\omega}\omega \, \exists g \in \mathscr{F} \, \big(g \not\leq^* f\big)$$

Weiter definieren wir die Kardinalzahl $\mathfrak{b}$ (bounding number) durch

$$\mathfrak{b} := \min \big\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \subseteq {}^{\omega}\omega \text{ ist eine unbeschränkte Familie}\big\}.$$

Zeige: $\omega_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$

Bemerkung: Aus $\mathsf{ZFC} + \mathsf{CH}$ folgt $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \omega_1$. Andererseits ist aber zum Beispiel $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \omega_{\omega+1}$ wie auch $\mathfrak{b} = \omega_{17} \wedge \mathfrak{c} = \omega_{23}$ konsistent mit $\mathsf{ZFC} + \neg\mathsf{CH}$.

26. Die Menge $[\omega]^\omega$ ist die Menge aller unendlichen Teilmengen von ω, also

$$[\omega]^\omega = \{x \subseteq \omega : x \text{ ist unendlich}\}.$$

Eine Familie $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ heisst **fast disjunkt** (almost disjoint, abgek. *a.d.*), falls gilt:

$$\forall x, y \in \mathscr{A} \left(x \neq y \rightarrow |x \cap y| < \omega\right)$$

Eine Familie $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ ist eine **maximale fast disjunkte** Familie (maximal almost disjoint, abgek. *m.a.d.*), falls $\mathscr{A}$ eine unendliche *a.d.* Familie ist und zusätzlich gilt:

$$\forall x \in [\omega]^\omega \, \exists y \in \mathscr{A} \left(|x \cap y| = \omega\right)$$

Weiter definieren wir die Kardinalzahl $\mathfrak{a}$ (almost disjoint number) durch

$$\mathfrak{a} := \min\left\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega \text{ ist eine } \textit{m.a.d.} \text{ Familie}\right\}.$$

(a) Konstruiere (ohne AC) eine *a.d.* Familie $\mathscr{A} \subseteq [\omega]^\omega$ mit $|\mathscr{A}| = \mathfrak{c}$.

(b) Zeige, dass die in (a) konstruierte *a.d.* Familie $\mathscr{A}$ keine *m.a.d.* Familie ist.

(c) Zeige mit Hilfe von AC, dass sich jede unendliche *a.d.* Familie $\mathscr{A}$ zu einer *m.a.d.* Familie erweitern lässt.

(d) Zeige: $\omega_1 \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{c}$

Bemerkung: Die Bemerkung zur Aufgabe 25 gilt analog auch für $\mathfrak{a}$.

η. Zeige: $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.