Grundstrukturen Serie 7

Bäume Besprechung am 27. April 2022

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Dann ist G **kreisfrei**, wenn G keine Kreise (d.h. keine geschlossene Kantenzüge) enthält. G ist ein **Baum**, wenn G zusammenhängend und kreisfrei ist.

27. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter Graph. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist ein Baum.

(b) G ist kreisfrei, aber wenn wir eine neue Kante hinzufügen, so entsteht ein Kreis.

(c) G enthält keine Schlingen und für beliebige zwei Knoten a, b (mit $a \neq b$) gibt es genau einen Kantenzug von a nach b.

(d) G ist zusammenhängend, aber wenn wir irgendeine Kante löschen, so ist G unzusammenhängend.

28. Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter und nicht-leerer Graph mit n Knoten.

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) G ist ein Baum.

(b) G ist kreisfrei und hat $n - 1$ Kanten.

(c) G ist zusammenhängend und hat $n - 1$ Kanten.

29. Beweise den folgenden SATZ VON CAYLEY für nicht-leere Graphen: Es gibt n^{n-2} verschiedene Bäume mit n festgelegten Knoten.

Hinweis: Sei $V = \{1, 2, \dots, n\}$ die Knotenmenge und sei $T = (V, E)$ ein Baum. Sei b_1 der Endkoten (Knoten mit Grad 1) mit kleinster Nummer und a_1 der mit b_1 adjazente Knoten. Entferne den Knoten b_1 und die Kante (a_1, b_1). Der Restgraph ist wieder ein Baum. Fahre so fort bis nur noch eine Kante übrig bleibt. Zu zeigen ist, dass eine Bijektion zwischen den Bäumen $T = (V, E)$ und den $(n - 2)$-Tupeln $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-2} \rangle$ existiert.

ϑ. ***Anzahl aufspannender Bäume***: Ein Graph $T = (V', E')$ ist ein **aufspannender Baum** des ungerichteten schlichten Graphen $G = (V, E)$, wenn T ein Baum ist mit $V' = V$ und $E' \subseteq E$. Sei $V = \{1, 2, \dots, n\}$ und sei A die Adjazenzmatrix von G. Weiter sei D die Diagonalmatrix mit $D_{ii} := \deg(i)$. Sei $M := D - A$ und sei M_i die Matrix welche man erhält, wenn man in M die i-te Zeile und die i-te Spalte streicht.

Zeige: Die Anzahl der aufspannender Bäume von G ist gleich $\det(M_i)$.