Grundstrukturen

Serie 8

Die chromatische Zahl

Besprechung am 4. Mai 2022

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, schlingenfreier, endlicher oder unendlicher Graph und sei $n \in \omega$ mit $n \geq 1$. Dann ist G **n-färbbar**, wenn es eine Funktion $\chi_n : V \to n$ gibt, sodass für alle $\{x, y\} \in E$ gilt $\chi_n(x) \neq \chi_n(y)$. Weiter sei

$$\chi(G) := \min \big\{ n \in \omega : G \text{ ist } n\text{-färbbar} \big\}$$

die **chromatische Zahl** des Graphen G.

30. Bestimme jeweils die chromatische Zahl der Kantengraphen der fünf platonischen Körper *Tetraeder*, *Würfel*, *Oktaeder*, *Dodekaeder* und *Ikosaeder*.

31. (a) Zeige, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann 2-färbbar ist, wenn er bipartit ist.

(b) Zeige, dass jeder Baum 2-färbbar ist.

(c) Zeige, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann 2-färbbar ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge besitzt.

32. Sei $G_+^\times = (V, E)$ der Graph der *paarweisen Summen und Produkte*, der wie folgt definiert ist:

$$V := \omega \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad E := \big\{ \{a, b\} \subseteq V : a \neq b \wedge \exists x, y \in \omega \, (x + y = a \ \wedge \ x \cdot y = b) \big\}$$

(a) Zeige: $\chi(G_+^\times) \geq 3$.

(b) Sei $G_+^\times|_{\geq m}$ der Graph $G_+^\times$ eingeschränkt auf die Knotenmenge $V' = V \setminus m$. Zeige: Für alle $m \in \omega$ ist $\chi\big(G_+^\times|_{\geq m}\big) \geq 3$.

Bemerkung: Der Wert von $\chi(G_+^\times)$ ist nicht bekannt. Es ist auch nicht bekannt, ob $\chi(G_+^\times)$ endlich ist. Aktuell ist über $\chi(G_+^\times)$ nur $\chi(G_+^\times) \geq 4$ bekannt.

ι. Für $n \in \omega$, $n \geq 1$ sei P_n die folgende Aussage über (unendliche) Graphen $G = (V, E)$:

P_n : *Ist jeder endliche Teilgraph eines Graphen n-färbbar, so ist auch der ganze Graph n-färbbar.*

(a) Zeige, dass für alle $n \in \omega$, $n \geq 1$ gilt: $\mathsf{P}_{n+1} \Rightarrow \mathsf{P}_n$.

Bemerkung: Für $n \geq 3$ gilt auch die Umkehrung $\mathsf{P}_n \Rightarrow \mathsf{P}_{n+1}$ und damit $\mathsf{P}_3 \Rightarrow \mathsf{P}_n$ für alle $n \geq 1$.

(b) Zeige: $\mathsf{AC} \Rightarrow \mathsf{P}_n$ für alle $n \in \omega$, $n \geq 1$.

Bemerkung: Hier gilt die Umkehrung nicht. Aus P_3 erhält man aber, dass sich jeder Filter zu einem Ultrafilter erweitern lässt.