Grundstrukturen
Serie 9

Diophantische Gleichungen

Besprechung am 11. Mai 2022

Eine Gleichung der Form $ax + by = c$ bei der a, b, c ganze Zahlen sind und ganzzahlige Lösungen für x und y gesucht werden, heisst **lineare diophantische Gleichung**.

33. (a) Zeige, dass die lineare diophantische Gleichung $ax+by = c$ nur dann eine Lösung haben kann, wenn c ein Vielfaches ist von $\mathrm{ggT}(a, b)$.

(b) Zeige, dass wenn die lineare diophantische Gleichung $ax + by = c$ eine Lösung hat, sie immer auch unendlich viele Lösungen hat.

34. (a) Finde mit Hilfe eines Näherungsbruches von $\frac{58}{21}$ eine Lösung der lineare diophantische Gleichung

$$58x - 21y = 1.$$

(b) Finde die allgemeine Lösung der linearen diophantischen Gleichung

$$986x + 357y = 51.$$

35. Drei Schiffbrüchige haben auf einer einsamen Insel während dem ganzen Tag mehr als 4000 Kokosnüsse gesammelt und auf einen grossen Haufen gelegt. Bevor es ans Aufteilen geht, wird es dunkel und sie legen sich erst einmal Schlafen.

In der Nacht wacht einer der Schiffbrüchigen auf und da er seinen Kumpanen nicht traut, beschliesst er, sich seinen Drittel der Kokosnüsse jetzt schon zu sichern. Er verteilt die Kokosnüsse gleichmässig auf drei Haufen. Dabei bleibt eine Kokosnuss übrig, die er wegwirft. Darauf trägt er seinen Haufen beiseite, schiebt die restlichen beiden Haufen zusammen und legt sich wieder hin.

Bald darauf wacht der zweite Schiffbrüchige auf. Auch er möchte sich seinen Anteil sichern und verfährt mit dem Resthaufen wie der Erste. Auch bei ihm bleibt nach dem Teilen eine Kokosnuss übrig, die er wegwirft. Als auch der dritte Schiffbrüchige aufwacht, verfährt er mit dem Resthaufen wie die ersten beiden, und wiedrum bleibt nach dem Teilen eine Kokosnuss übrig, die er wegwirft.

Am nächsten Morgen gehen die drei Schiffbrüchigen zu dem, in der Nacht geschrumpften, Haufen und teilen die Kokosnüsse gleichmässig unter sich auf. Dabei bleibt eine Kokosnuss übrig, die sie wegwerfen.

Wie viele Kokosnüsse befanden sich zu Beginn *mindestens* auf dem Haufen?

36. $(\mathbb{Q}[X], 0, 1, +, \cdot)$ sei der Ring der Polynome mit rationalen Koeffizienten (vergleiche mit Aufgabe 11). Seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ die Polynome

$$f = X^3 + X + 1 \quad \text{und} \quad g = X^2 + 2.$$

Finde zwei Polynome $h_0, h_1 \in \mathbb{Q}[X]$ sodass gilt:

$$h_0 \cdot f - h_1 \cdot g = X^2 - 1$$

Hinweis: Es ist $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$; verwende den verallgemeinerten Euklid'schen Algorithmus um $\tilde{h}_0$ und $\tilde{h}_1$ zu finden mit $\tilde{h}_0 \cdot f - \tilde{h}_1 \cdot g = 1$.

κ. ***Das archimedische Rinderproblem***: Beim Rinderproblem des Archimedes (das 1773 von Gotthold Ephraim Lessing entdeckt wurde) geht es darum, die Anzahl der Rinder (Stiere und Kühe, mit je vier Sorten) in einer Herde des Sonnengottes Helios zu bestimmen.

Bei der Lösung des archimedischen Rinderproblems stösst man, wenn man geschickt rechnet, auf die *Pell'sche Gleichung*

$$x^2 - D \cdot y^2 = 1 \quad \text{mit} \quad D = 4\,729\,494.$$

Finde die kleinste Lösung x und y für diese Gleichung.