Grundstrukturen

Serie 10

zyklische Gruppen

Besprechung am 18. Mai 2022

Für positive Zahlen n bezeichnet C_n eine zyklische Gruppe der Ordnung n.

37. (a) Sei G eine Gruppe und sei g ein Element endlicher Ordnung. Zeige, dass für jede ganze Zahl k gilt

$$\operatorname{ord}(g^k) = \frac{\operatorname{kgV}(k, \operatorname{ord}(g))}{k}.$$

(b) Sei G eine abelsche Gruppe und seien $g, h \in G$ zwei Elemente endlicher teilerfremder Ordnung. Zeige: $\operatorname{ord}(gh) = \operatorname{ord}(g) \cdot \operatorname{ord}(h)$.

38. Seien $m, n \geq 1$ natürliche Zahlen.

Zeige: Es gilt genau dann $C_m \times C_n \cong C_{n \cdot m}$, wenn $\operatorname{ggT}(m, n) = 1$ ist.

39. Zeige, dass C_4 und $C_2 \times C_2$ bis auf Isomorphie die einzigen Gruppen der Ordnung 4 sind.

40. Zeige, dass Untergruppen von zyklischen Gruppen zyklisch sind.

41. (a) Sei p eine Primzahl.

Zeige: Es gibt bis auf Isomorphie genau eine Gruppe der Ordnung p, nämlich C_p.

(b) Sei G eine Gruppe mit genau einer nichttrivialen echten Untergruppe.

Zeige: Dann gilt $G \cong C_{p^2}$ für eine Primzahl p.

42. Finde positive natürliche Zahlen $n_0, \ldots, n_k$ mit $n_i \mid n_{i+1}$ für alle $0 \leq i < k$, sodass gilt:

$$C_{180} \times C_{150} \times C_{70} \times C_{36} \times C_{12} \;\cong\; C_{n_0} \times \ldots \times C_{n_k}$$

$\boldsymbol{\lambda}$. ***Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen***: Sei G eine abelsche Gruppe mit der Eigenschaft, dass für eine endliche Teilmenge $X \subseteq G$ gilt $\langle X \rangle = G$. Zeige, dass dann

$$G \cong C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_k} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}_{r\text{-mal}}$$

wobei $k, r \in \mathbb{N}$ und, im Fall $k > 0$, für alle $1 \leq i < k$ gilt $n_i \mid n_{i+1}$.