Grundstrukturen

Serie 12

Die Möbiusfunktion

Besprechung am 1. Juni 2022

Für eine Folge $A = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ von Zahlen $a_n \in \mathbb{Z}$ sei $A(s)$ die formale Reihe

$$A(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

47. Zeige, dass für zwei Folgen $A = (a_k)_{k=1}^{\infty}$ und $B = (b_l)_{l=1}^{\infty}$ gilt:

$$A(s) \cdot B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{kl=n} a_k\, b_l}{n^s}$$

Sei $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ die *Riemann'sche Zetafunktion* und für natürliche Zahlen $n \geq 1$ sei die *Möbiussequenz* $\mu(n)$ wie folgt definiert:

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 0 & \text{falls } p^2 \mid n \text{ für eine Primzahl } p, \\ (-1)^{t_n} & \text{falls } n = p_1 \cdots p_{t_n} \text{ für paarweise verschiedene Primzahlen } p_i. \end{cases}$$

Weiter sei

$$M(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

die *Möbiusfunktion*.

48. Zeige:

$$M(s) \cdot \zeta(s) = 1$$

49. Seien $f, g : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ zwei Funktionen für die gilt:

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

Zeige, dass dann gilt:

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f(\tfrac{n}{d})$$

Hinweis: Für $F = (f(n))_{n=1}^{\infty}$ und $G = (g(n))_{n=1}^{\infty}$ gilt $F(s) = \zeta(s) \cdot G(s)$.

ν. Zeige, dass gilt:

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{\substack{p \,\mid\, n \\ p \text{ prim}}} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)$$

Hinweis: Zeige zuerst $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.