GRUNDSTRUKTUREN

Skript zur Vorlesung 2022

Lorenz Halbeisen

ETH Zürich

0. Terme, Formeln und formale Beweise

In diesem Kapitel wird die Syntax (auch Sprache genannt) der Logik erster Stufe definiert. Insbesondere werden wir definieren, was Terme und Formeln sind. Dafür brauchen wir zuerst ein sogenanntes *Alphabet*, d.h. ein Vorrat an Zeichen und Symbolen, aus dem wir Terme und Formeln bilden können.

Das Alphabet

Das Alphabet der Logik erster Stufe besteht aus folgenden Zeichen und Symbolen:

(a) **Variablen**: Zum Beispiel $x, y, v_0, v_1, \ldots$, von denen wir einen unendlichen Vorrat haben. Variablen stehen für Objekte, die wir untersuchen. Diese Objekte können zum Beispiel natürliche Zahlen sein (in der Zahlentheorie), oder auch Mengen (in der Mengenlehre), oder Vektoren (in der linearen Algebra), etc.

(b) **Logische Operatoren**: $\neg$ (*nicht*), $\wedge$ (*und*), $\vee$ (*oder*), $\rightarrow$ (*impliziert*).

(c) **Logische Quantoren**: $\exists$ (*Existenzquantor*) und $\forall$ (*Allquantor*), nach einem logischen Quantor steht *immer* eine Variable.

(d) **Gleichheitsrelation** $=$: Das Zeichen "$=$" steht für eine spezielle binäre Relation, nämlich für die Gleichheitsrelation.

(e) **Konstantensymbole**: Diese Symbole werden verwendet um spezielle Konstanten (in einer Theorie) zu bezeichnen. Konstantensymbole sind zum Beispiel $\mathsf{0}$ (in der Zahlentheorie), $\emptyset$ (in der Mengenlehre), etc.

(f) **Funktionssymbole**: Diese Symbole werden verwendet um spezielle Funktionen (in einer Theorie) zu bezeichnen. Funktionssymbole sind zum Beispiel $+$ (in der Zahlentheorie), $\sin$ (in der Analysis), etc. Zu jedem Funktionssymbol gehört eine *Stelligkeit*. Zum Beispiel ist $+$ ein 2-stelliges Funktionssymbol und $\sin$ ist ein 1-stelliges Funktionssymbol.

(g) **Relationssymbole**: Diese Symbole werden verwendet um spezielle Relationen (in einer Theorie) zu bezeichnen. Relationssymbole sind zum Beispiel $<$ (in der Zahlentheorie), $\in$ (in der Mengenlehre), etc. Zu jedem Relationssymbol gehört eine *Stelligkeit*. Zum Beispiel sind $<$ und $\in$ beides 2-stellige Relationssymbole.

Die Symbole (a)–(d) sind die **logischen Symbole**, diese Symbole haben wir immer. Die Symbole (e)–(g) sind die **nicht-logischen Symbole**, welche und wieviele dieser Symbole wir haben, hängt von der Theorie ab, die wir untersuchen. Die nicht-logischen Symbole einer Theorie bilden die **Signatur** (oder Sprache) der Theorie, diese wird mit $\mathscr{L}$ oder $\mathscr{L}_{\mathsf{T}}$ (für eine Theorie T) bezeichnet. Zum Beispiel ist $\mathscr{L}_{\mathsf{ZFC}} = \{\in\}$ die Signatur der Mengenlehre ZFC.

Terme

Mit den Zeichen des Alphabets können wir nun spezielle Zeichenketten oder Wörter bilden. In der Sprache der Logik erster Stufe heissen diese Zeichenketten *Terme*. Im Folgenden sei $\mathscr{L}$ eine beliebige Signatur.

Eine Zeichenkette ist ein **$\mathscr{L}$-Term**, oder einfach ein **Term**, falls die Zeichenkette durch endlich viele Anwendungen der folgenden Regeln entstanden ist.

(T0) Jede Variable ist ein $\mathscr{L}$-Term.
(T1) Jedes Konstantensymbol in $\mathscr{L}$ ist ein $\mathscr{L}$-Term.
(T2) Sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ bereits konstruierte $\mathscr{L}$-Terme und ist F ein n-stelliges Funktionssymbol in $\mathscr{L}$, dann ist $F\tau_1 \cdots \tau_n$ ein $\mathscr{L}$-Term.

Um die Regel (T2) zu definieren, haben wir Variablen für Terme gebraucht. Da nun Variablen aus unserem Alphabet selber Terme sind, haben wir neue Variablen τ_i, die nicht zu unserem Alphabet gehören, eingeführt.

Formeln

Mit Termen (bzw. mit den Wörtern) und weitern Zeichen aus unserem Alphabet, können wir nun wieder spezielle Zeichenketten oder Sätze bilden. In der Sprache der Logik erster Stufe heissen diese Zeichenketten *Formeln*. Im Folgenden sei $\mathscr{L}$ eine beliebige Signatur.

Eine Zeichenkette ist eine **$\mathscr{L}$-Formel**, oder einfach eine **Formel**, falls die Zeichenkette durch endlich viele Anwendungen der folgenden Regeln entstanden ist.

(F0) Sind τ_1 und τ_2 $\mathscr{L}$-Terme, dann ist $= \tau_1\tau_2$ eine $\mathscr{L}$-Formel.
(F1) Sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ bereits konstruierte $\mathscr{L}$-Terme und ist R ein n-stelliges Relationssymbol in $\mathscr{L}$, dann ist $R\tau_1 \cdots \tau_n$ eine $\mathscr{L}$-Formel.
(F2) Ist φ eine bereits konstruierte $\mathscr{L}$-Formel, dann ist $\neg\varphi$ eine $\mathscr{L}$-Formel.
(F3) Sind φ und ψ bereits konstruierte $\mathscr{L}$-Formeln, dann sind $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, und $\rightarrow \varphi\psi$ ebenfalls $\mathscr{L}$-Formeln.
(F4) Ist φ eine bereits konstruierte $\mathscr{L}$-Formel und ν eine beliebige Variable, dann sind $\exists\nu\varphi$ und $\forall\nu\varphi$ ebenfalls $\mathscr{L}$-Formeln.

Um Formeln einfach lesbar zu machen verwenden wir üblicherweise die Infix-Notation mit Klammern anstelle der polnischen Notation. Zum Beispiel schreiben wir $\varphi \wedge \psi$ anstelle von $\wedge\varphi\psi$, $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$ anstelle von $\rightarrow\rightarrow \varphi\psi\varphi$, etc.

Weiter schreiben wir für binäre Relationssymbole R und binäre Funktionssymbole F meist xRy und xFy anstelle von Rxy bzw. Fxy. Zum Beispiel schreiben wir $x = y$ anstelle von $= xy$, und $x + y$ anstelle von $+xy$.

Ist eine Formel φ von der Form $\exists\nu\psi$ oder $\forall\nu\psi$ (für eine Variable ν und eine Formel ψ) und die Variable ν kommt in ψ vor, dann sagen wir, dass die Variable ν im Bereich eines logischen Quantors ist; die Variable wird dann durch den Quantor **gebunden**. Ist eine Variable ν in einer Formel ψ an einer gewissen Stelle nicht im Bereich eines Quantors (d.h. die Variable ist nicht gebunden), so kommt die Variable ν an der entsprechenden Stelle **frei** vor in ψ. Die Menge der Variablen, welche in einer Formel ψ frei vorkommen, wird mit $\mathrm{frei}(\psi)$ bezeichnet. Da eine Variable in einer Formel ψ an mehreren Stellen vorkommen kann, kann eine Variable sowohl frei wie auch gebunden in ψ vorkommen. Zum Beispiel kommt die Variable x in der Formel $\exists z(x = z) \wedge \forall x(x = y)$ sowohl frei wie auch gebunden vor. Durch Umbenennen der Variablen lässt sich aber erreichen, dass jede Variable in einer Formel entweder nur gebunden oder nur frei vorkommt.

Eine Formel φ ist ein **Satz**, falls φ keine freien Variablen enthält (d.h. $\mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset$). Zum Beispiel ist $\forall x\forall y(x = y)$ ein Satz, aber $\forall x(x = y)$ ist nur eine Formel.

Manchmal ist es nützlich die freien Variablen in einer Formel explizit aufzulisten; wir schreiben $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ um anzuzeigen, dass die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ frei in φ vorkommen.

Ist φ eine Formel, ν eine Variable und τ ein Term, dann ist $\varphi(\nu/\tau)$ diejenige Formel, die wir erhalten, wenn wir an jeder Stelle, an der die Variable ν in φ frei vorkommt, die Variable ν ersetzen durch den Term τ. Dieser Prozess, bei dem wir aus φ die Formel $\varphi(\nu/\tau)$ erhalten, heisst **Substitution**. Eine Substitution $\varphi(\nu/\tau)$ ist nur dann **zulässig**, wenn keine Variable im Term τ durch Quantoren von φ gebunden werden. Gilt zum Beispiel $x \notin \mathrm{frei}(\varphi)$, dann ist die Substitution $\varphi(x/\tau)$ zulässig für jeden Term τ. In diesem Fall ist die Formel φ identisch mit $\varphi(x/\tau)$, was wir durch $\varphi \equiv \varphi(x/\tau)$ ausdrücken — das Gleichheitszeichen "$=$" macht zwischen Formeln keinen Sinn.

Die Logischen Axiome

Bei der Definition von Formeln haben wir zwar Zeichen wie zum Beispiel "$=$" oder "$\wedge$" gebraucht, wir haben aber nicht festgelegt, was diese Zeichen später, wenn wir Formeln interpretieren werden, bedeuten sollen. Zum Beispiel möchten wir, dass die Formel $x = x$ "wahr" ist. Da es aber auf der syntaktischen Ebene keinen Wahrheitsbegriff gibt, können wir $x = x$ nicht einfach als "wahr" definieren. Wir können aber gewisse Formeltypen (oder Formelschemata), wie zum Beispiel $x = x$, auszeichnen. Die folgenden **logischen Axiome**, eigentlich *Axiomenschemata*, sind solche ausgezeichneten Formeltypen, welche den Gebrauch der logischen Operatoren und Quantoren sowie der Gleichheitsrelation regeln.

Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur und seien φ, φ_1, φ_2, φ_3, und ψ beliebige $\mathscr{L}$-Formeln:

L_0: $\varphi \vee \neg\varphi$
L_1: $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
L_2: $(\psi \to (\varphi_1 \to \varphi_2)) \to ((\psi \to \varphi_1) \to (\psi \to \varphi_2))$
L_3: $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$
L_4: $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
L_5: $\varphi \to (\psi \to (\psi \wedge \varphi))$
L_6: $\varphi \to (\varphi \vee \psi)$
L_7: $\psi \to (\varphi \vee \psi)$
L_8: $(\varphi_1 \to \varphi_3) \to ((\varphi_2 \to \varphi_3) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \to \varphi_3))$
L_9: $\neg\varphi \to (\varphi \to \psi)$

Sei τ ein $\mathscr{L}$-Term, ν eine Variable, und sei die Substitution $\varphi(\nu/\tau)$ zulässig:

L_{10}: $\forall\nu\varphi(\nu) \to \varphi(\tau)$
L_{11}: $\varphi(\tau) \to \exists\nu\varphi(\nu)$

Sei ψ eine Formel und sei ν eine Variable mit $\nu \notin \mathrm{frei}(\psi)$:

L_{12}: $\forall\nu(\psi \to \varphi(\nu)) \to (\psi \to \forall\nu\varphi(\nu))$,
L_{13}: $\forall\nu(\varphi(\nu) \to \psi) \to (\exists\nu\varphi(\nu) \to \psi)$.

Seien τ, $\tau_1, \ldots, \tau_n$, $\tau_1', \ldots, \tau_n'$ $\mathscr{L}$-Terme, sei $R \in \mathscr{L}$ ein n-stelliges Relationssymbol und sei $F \in \mathscr{L}$ ein n-stelliges Funktionssymbol:

L_{14}: $\tau = \tau$
L_{15}: $(\tau_1 = \tau_1' \wedge \cdots \wedge \tau_n = \tau_n') \to (R(\tau_1, \ldots, \tau_n) \to R(\tau_1', \ldots, \tau_n'))$
L_{16}: $(\tau_1 = \tau_1' \wedge \cdots \wedge \tau_n = \tau_n') \to (F(\tau_1, \ldots, \tau_n) = F(\tau_1', \ldots, \tau_n'))$

Die logischen Axiome L_0–L_9 sind die Axiome der Aussagenlogik, welche den Gebrauch der logischen Operatoren regeln, die logischen Axiome L_{10}–L_{13} regeln den Gebrauch der logischen Quantoren, und die logischen Axiome L_{14}–L_{16} regeln den Gebrauch der Gleichheitsrelation.

Logische Äquivalenz

Die Formel $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist eine abgekürzte Schreibweise für $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, d.h. jede Formel, in welcher der binäre logische Operator $\leftrightarrow$ vorkommt, kann ersetzt werden durch eine Formel, in welcher $\leftrightarrow$ nicht mehr vorkommt. Wir sagen nun, dass zwei Formeln φ und ψ **logisch äquivalent** sind, in Zeichen $\varphi \Leftrightarrow \psi$, falls gilt:

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{bzw.} \quad \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

Mit L_5 und (MP) gilt $\varphi \Leftrightarrow \psi$ genau dann wenn

$$\vdash \varphi \to \psi \quad \text{und} \quad \vdash \psi \to \varphi\,.$$

Der Beweis des folgenden Satzes benutzt "Metainduktion" über den Formelaufbau und ist relativ aufwendig.

Satz über logische Äquivalenz. *Sei φ eine Formel und sei α eine Teilformel von φ. Weiter sei ψ eine Formel, die aus φ dadurch entstanden ist, dass in φ ein- oder mehrmals α durch eine Formel β ersetzt wurde. Dann gilt:*

$$\textit{Ist}\ \ \alpha \Leftrightarrow \beta, \quad \textit{so ist auch} \quad \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

Nicht-logischen Axiome

Wenn wir eine konkrete Theorie haben, wie zum Beispiel die Zahlentheorie, so kommen zu den logischen Axiomen sogenannte **nicht-logische Axiome** hinzu, welche den Gebrauch (bzw. die Bedeutung) der nicht-logischen Symbole dieser Theorie regeln. Die nicht-logischen Axiome einer Theorie sind ausgezeichnete Formeln (meistens Sätze) welche wir meist mit $\mathbf{\Phi}$ (bzw. T) bezeichnen.

Formale Beweise

Um aus gegebenen Formeln Schlüsse zu ziehen oder Aussagen über bestimmte Terme zu machen, brauchen wir sowohl Schlussregeln wie auch einen Algorithmus, der uns sagt, auf welche Formeln wir die Schlussregeln anwenden können.

Wir brauchen nur zwei **Schlussregeln**, nämlich

$$\text{Modus Ponens (MP):} \quad \frac{\varphi \to \psi,\ \varphi}{\psi} \qquad \text{und} \qquad \text{Verallgemeinerung } (\forall)\text{:} \quad \frac{\varphi}{\forall \nu \varphi}\,.$$

Im ersten Fall sagen wir, dass die Formel ψ aus den Formeln $\varphi \to \psi$ und φ durch Modus Ponens, abgekürzt (MP), entstanden ist, und im zweiten Fall sagen wir, dass die Formel $\forall \nu \varphi$ (wobei ν für irgend eine Variable steht) aus der Formel φ durch Verallgemeinerung, abgekürzt $(\forall)$ entstanden ist.

Mit den zwei Schlussregeln (MP) und $(\forall)$ können wir nun formale Beweise definieren: Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur (d.h. eine möglicherweise leere Menge von nicht-logischen Symbolen) und sei $\mathbf{\Phi}$ eine (möglicherweise leere) Menge von $\mathscr{L}$-Formeln. Eine $\mathscr{L}$-Formel ψ ist **beweisbar** aus $\mathbf{\Phi}$ (oder beweisbar in $\mathbf{\Phi}$), bezeichnet mit $\mathbf{\Phi} \vdash \psi$, falls es eine endliche Sequenz $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ von

$\mathscr{L}$-Formeln gibt, sodass $\varphi_n \equiv \psi$ (d.h. die Formeln φ_n und ψ sind identisch), und für alle i mit $i \leq n$ sind wir in mindestens einem der folgenden Fälle:

- φ_i ist eine Instanziierung eines logischen Axioms
- φ_i ist eine Formel aus $\mathbf{\Phi}$
- es gibt $j, k < i$ sodass $\varphi_j \equiv \varphi_k \to \varphi_i$
- es gibt ein $j < i$ und eine Variable ν, sodass $\varphi_i \equiv \forall \nu \, \varphi_j$

Die Sequenz $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ ist dann ein **formaler Beweis** von ψ aus $\mathbf{\Phi}$.

Im Fall, wenn $\mathbf{\Phi}$ die leere Menge ist, schreiben wir einfach $\vdash \psi$. Ist eine Formel ψ nicht aus $\mathbf{\Phi}$ beweisbar (d.h. es gibt keinen formalen Beweis von ψ aus $\mathbf{\Phi}$), so schreiben wir $\mathbf{\Phi} \nvdash \psi$.

Formale Beweise, auch für sehr einfache Formeln, können recht lang und knifflig sein. Als Beispiel für einen formalen Beweis zeigen wir:

$$\vdash \varphi \to \varphi$$

φ_0:	$(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	Instanziierung von L_2
φ_1:	$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	Instanziierung von L_1
φ_2:	$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	aus φ_0 und φ_1 mit (MP)
φ_3:	$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	Instanziierung von L_1
φ_4:	$\varphi \to \varphi$	aus φ_2 und φ_3 mit (MP)

Das folgende Theorem ist sehr nützlich um formale Beweise zu vereinfachen.

DEDUKTIONSTHEOREM (DT). *Ist $\mathbf{\Phi}$ eine Menge von Formeln mit $\mathbf{\Phi} + \psi \vdash \varphi$, wobei im formalen Beweis von φ aus $\mathbf{\Phi} + \psi$ die Verallgemeinerung nicht auf Variablen angewandt wurde, welche frei in ψ vorkommen, so gilt $\mathbf{\Phi} \vdash \psi \to \varphi$; und umgekehrt, gilt $\mathbf{\Phi} \vdash \psi \to \varphi$, dann gilt auch $\mathbf{\Phi} + \psi \vdash \varphi$.*

Beweis. Mit (MP) folgt aus $\mathbf{\Phi} \vdash \psi \to \varphi$ direkt $\mathbf{\Phi} + \psi \vdash \varphi$. Für die andere Richtung nehmen wir an, dass $\mathbf{\Phi} + \psi \vdash \varphi$ gilt. Sei nun die Sequenz $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ mit $\varphi_n \equiv \varphi$ ein formaler Beweis von φ aus $\mathbf{\Phi} + \psi$. Für jedes $i \leq n$ ersetzen wir nun φ_i durch eine Sequenz von Formeln, welche mit $\psi \to \varphi_i$ endet. Dazu sei $i \leq n$ und wir nehmen an, dass $\mathbf{\Phi} \vdash \psi \to \varphi_j$ gilt für alle $j < i$.

- Ist φ_i ein logisches Axiom oder $\varphi_i \in \mathbf{\Phi}$, dann haben wir:

$\varphi_{i,0}$:	φ_i	$\varphi_i \in \mathbf{\Phi}$ oder φ_i ist ein logisches Axiom
$\varphi_{i,1}$:	$\varphi_i \to (\psi \to \varphi_i)$	Instanziierung von L_1
$\varphi_{i,2}$:	$\psi \to \varphi_i$	aus $\varphi_{i,1}$ und $\varphi_{i,0}$ mit (MP)

- Der Fall $\varphi_i \equiv \psi$ folgt direkt aus $\vdash \varphi_i \to \varphi_i$, was im obigen Beispiel gezeigt wurde.

- Falls φ_i aus φ_j und $\varphi_k \equiv (\varphi_j \to \varphi_i)$ durch Modus Ponens erhalten wurde, wobei $j, k < i$, dann haben wir:

$\varphi_{i,0}$:	$\psi \to \varphi_j$	weil $j < i$
$\varphi_{i,1}$:	$\psi \to (\varphi_j \to \varphi_i)$	weil $k < i$

$\varphi_{i,2}$:	$\varphi_{i,1} \to ((\psi \to \varphi_j) \to (\psi \to \varphi_i))$	Instanziierung von L_2
$\varphi_{i,3}$:	$(\psi \to \varphi_j) \to (\psi \to \varphi_i)$	aus $\varphi_{i,2}$ und $\varphi_{i,1}$ mit (MP)
$\varphi_{i,4}$:	$\psi \to \varphi_i$	aus $\varphi_{i,3}$ und $\varphi_{i,0}$ mit (MP)

- Falls φ_i aus φ_j durch Verallgemeinerung erhalten wurde, wobei $j < i$, d.h. $\varphi_i \equiv \forall \nu \varphi_j$ für eine Variable ν, dann gilt, dass die Variable ν in ψ nicht frei vorkommt. Die Behauptung folgt dann aus:

$\varphi_{i,0}$:	$\psi \to \varphi_j$	weil $j < i$
$\varphi_{i,1}$:	$\forall \nu(\psi \to \varphi_j)$	aus $\varphi_{i,0}$ durch ($\forall$)
$\varphi_{i,2}$:	$\forall \nu(\psi \to \varphi_j) \to (\psi \to \varphi_i)$	Instanziierung von L_{12}
$\varphi_{i,3}$:	$\psi \to \varphi_i$	aus $\varphi_{i,2}$ und $\varphi_{i,1}$ mit (MP)

Somit haben wir gezeigt, dass $\mathbf{\Phi} \vdash \psi \to \varphi$ gilt. $\dashv$

Als Anwendung des DEDUKTIONSTHEOREMS zeigen wir, dass die Gleichheitsrelation "$=$" eine Äquivalenzrelation ist: Eine binäre Relation R ist eine **Äquivalenzrelation** falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

reflexiv: $\forall x(xRx)$

symmetrisch: $\forall x \forall y(xRy \to yRx)$

transitiv: $\forall x \forall y \forall z\big((xRy \wedge yRz) \to xRz\big)$

Wir zeigen nun, dass die binäre Relation "$=$" reflexiv und symmetrisch ist; dass "$=$" auch transitiv ist wird in Aufgabe 2 gezeigt.

"$=$" ist reflexiv:

φ_0:	$x = x$	Instanziierung von L_{14}
φ_1:	$\forall x(x = x)$	aus φ_0 mit ($\forall$)

"$=$" ist symmetrisch:
Wir zeigen zuerst $\{x = y\} \vdash y = x$, d.h. $\mathbf{\Phi} \vdash y = x$ für $\mathbf{\Phi}$ die Menge mit der einzigen Formel $x = y$.

φ_0:	$(x = y \wedge x = x) \to (x = x \to y = x)$	Instanziierung von L_{15}
φ_1:	$x = x$	Instanziierung von L_{14}
φ_2:	$x = y$	$x = y \in \mathbf{\Phi}$
φ_3:	$x = x \to (x = y \to (x = y \wedge x = x))$	Instanziierung von L_5
φ_4:	$x = y \to (x = y \wedge x = x)$	aus φ_3 und φ_1 mit (MP)
φ_5:	$x = y \wedge x = x$	aus φ_4 und φ_2 mit (MP)
φ_6:	$x = x \to y = x$	aus φ_0 und φ_5 mit (MP)
φ_7:	$y = x$	aus φ_6 und φ_1 mit (MP)

Somit haben wir $\{x = y\} \vdash y = x$. Mit dem DEDUKTIONSTHEOREM erhalten wir also

$$\vdash x = y \to y = x$$

und durch Verallgemeinerung erhalten wir schliesslich:

$$\vdash \forall x \forall y(x = y \to y = x)$$