11. FORMALE POTENZREIHEN

Eine **Reihe** ist eine Summe mit unendlich vielen Summanden. Zum Beispiel ist die Summe aller natürlichen Zahlen

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots$$

eine Reihe. Eine endliche Summe lässt sich immer auch als Reihe schreiben, indem wir einfach unendlich viele Nullen addieren. Zum Beispiel ist $3 + 4$ eine Summe, aber

$$3 + 4 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

ist eine Reihe. Eine **formale Potenzreihe** (oder einfach Potenzreihe) ist eine Reihe der Form

$$a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

wobei die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ (für $n \in \mathbb{N}$) Elemente aus einem Körper K sind (z. .B. aus $\mathbb{R}$) und z (oder x, oder s, etc.) irgend eine *Unbestimmte* ist, wobei eine Unbestimmte weder ein Körperelement noch eine Variable ist. Zum Beispiel sind $(1z^0 + 2z^1 + 3z^2 + \dots)$ und $(0z^0 - 1z^1 + 0z^2 - 1z^3 + 0z^4 - 1z^5 + \dots)$ Potenzreihen.

Üblicherweise schreiben wir bloss a_0 anstelle von $a_0 z^0$, und anstelle von $a_1 z^1$ schreiben wir bloss $a_1 z$. Wenn $a_n = 0$ (für irgend $n \in \mathbb{N}$), so schreiben wir $a_n z^n$ nicht. Die obigen Potenzreihen können also wie folgt geschrieben werden:

- $(1z^0 + 2z^1 + 3z^2 + \dots) = (1 + 2z + 3z^2 + \dots)$
- $(0z^0 - 1z^1 + 0z^2 - 1z^3 + 0z^4 - 1z^5 + \dots) = (-z - z^3 - z^5 - \dots)$

Wie oben erwähnt, darf anstelle von z auch irgend eine andere Unbestimmte geschrieben werden, wie zum Beispiel x oder y.

Formal kann die n-te Potenz der Unbestimmten z, also z^n, aufgefasst werden als ein Vektor mit abzählbar unendlich vielen Koordinaten, wobei nur an der n-ten Stelle eine 1 und sonst überall 0-en stehen:

$$[0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{1}, 0, 0, 0, 0, \dots]$$

Der Ausdruck $a_n z^n$ entspricht dann dem Vektor

$$[0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Stelle}}}{a_n}, 0, 0, 0, 0, \dots]$$

und die Potenzreihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ entspricht dem Vektor

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots].$$

Formale Potenzreihen können also als Vektoren in einem ω-dimensionalen Vektorraum über dem Körper K aufgefasst werden, wobei die Potenzen $z^0, z^1, \dots, z^n, \dots$ der Unbestimmten z die Rolle der Basisvektoren $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$ übernehmen.

Ist für eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ und für alle $n \geq n_0$, $a_n = 0$, so entspricht die Potenzreihe

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)$$

einem **Polynom**. Das heisst, Polynome sind Potenzreihen bei denen nur endlich viele Koeffizienten von Null verschieden sind.

Jede Potenzreihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ definiert eine Funktion $A : \mathbb{N} \to K$ dadurch, dass wir für alle $n \in \mathbb{N}$ festsetzen $A(n) := a_n$. Umgekehrt definiert jede Funktion $A : \mathbb{N} \to K$ eine Potenzreihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ dadurch, dass wir festsetzen $a_n := A(n)$. Diese Beziehung zwischen Funktionen $A : \mathbb{N} \to K$ (bzw. abzälbaren Folgen in K) und Potenzreihen werden wir benutzten, um *generierende Funktionen* von Zahlenfolgen (für $K = \mathbb{R}$) zu berechnen.

Die wohl einfachste (echte) Potenzreihe ist die *geometrische Reihe*:

$$\mathrm{geo}(z) := (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots) = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$$

Wenn wir in der Potenzreihe $\mathrm{geo}(z)$ die Unbestimmte z ersetzen durch $-z$ oder z^2, so erhalten wir wieder eine Potenzreihe, welche wir mit $\mathrm{geo}(-z)$ bzw. $\mathrm{geo}(z^2)$ bezeichnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{geo}(-z) &= ((-z)^0 + (-z)^1 + (-z)^2 + \ldots) = (1 - z + z^2 - z^3 + \ldots) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n z^n \\ \mathrm{geo}(z^2) &= ((z^2)^0 + (z^2)^1 + (z^2)^2 + \ldots) = (1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots) = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n} \end{aligned}$$

Rechnen mit formalen Potenzreihen

Formale Potenzreihen können addiert und multipliziert werden, jede Potenzreihe hat ein additiv Inverses und manche Potenzreiehn haben sogar ein multiplikativ Inverses: Im Folgenden seien

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) \quad \text{und} \quad (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \ldots)$$

zwei beliebige Potenzreihen.

Die Addition und Subtraktion (bzw. Addition mit dem additiv Inversen) dieser beiden Potenzreihen geschieht komponentenweise:

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) \pm (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots) = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots)$$

mit $c_n = a_n \pm b_n$.

Die Multiplikation folgt direkt aus dem Distributivgesetz und ist eine Art "Faltung":

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots) = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots)$$

mit $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$.

Damit eine Potenzreihe $(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)$ ein multiplikativ Inverses $(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)^{-1}$ besitzt, muss $b_0 \neq 0$ sein. Sei $(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots)$ die Potenzreihe $(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)^{-1}$. Dann gilt

$$(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots) \cdot (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots) = 1$$

und mit der Regel für die Multiplikation lassen sich dann die Koeffizienten c_n sogenannten *Koeffizientenvergleich* Schrit für Schritt durch berechnen: Es ist $1 = b_0 c_0$, also $c_0 = {b_0}^{-1}$ (beachte, dass $b_0 \neq 0$). Weiter ist $0 = b_0 c_1 + b_1 c_0$ und mit $c_0 = {b_0}^{-1}$ ist $c_1 = {b_0}^{-1}(-b_1 {b_0}^{-1})$, etc.

Für die Potenzreihe $(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)^{-1}$ schreiben wir auch

$$\frac{(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots)}{(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots)}.$$

Als Anwendung der Multiplikation von Potenzreihen berechnen wir nun drei Produkte geometrischer Potenzreihen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{geo}(z) \cdot \mathrm{geo}(-z) &= 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \ldots = \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n} = \mathrm{geo}(z^2) \\ \mathrm{geo}(z) \cdot \mathrm{geo}(z) = \mathrm{geo}(z)^2 &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ldots = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1) z^n \\ \mathrm{geo}(z)^2 \cdot \mathrm{geo}(-z) &= 1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 4z^6 + \ldots \end{aligned}$$

Als letztes Beispiel berechnen wir $(1-z)\cdot\mathrm{geo}(z)$. Es ist leicht zu sehen, dass gilt

$$(1-z)\cdot\mathrm{geo}(z)=1\,,$$

woraus folgt:

$$\mathrm{geo}(z)=(1-z)^{-1}\quad\text{bzw.}\quad\mathrm{geo}(z)=\frac{1}{1-z}$$

Damit erhalten wir zum Beispiel

$$\mathrm{geo}(z)\cdot\mathrm{geo}(-z)=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-z^2}=\mathrm{geo}(z^2),$$

was wir oben bereits ausgerechnet haben.

Unendliche Produkte formaler Potenzreihen

Sei Pr die Menge aller Potenzreihen (über einem Köper K) in der Unbestimmten z. Eine unendliche Familie $\mathscr{F}=\{f_l\in\mathrm{Pr}:l\in\mathbb{N}\}$ von Potenzreihen heisst **multiplizierbar**, falls

$$\prod_{l\in\mathbb{N}}f_l\in\mathrm{Pr}\,.$$

Die Aussage $\prod_{l\in\mathbb{N}}f_l\in\mathrm{Pr}$ bedeutet, dass die *endlichen* Produkte $\prod_{l\in L}f_l\in\mathrm{Pr}$ für $L\to\infty$ gegen eine Potenzreihe $f\in\mathrm{Pr}$ *konvergieren*. Um dies formaler auszudrücken, definieren wir für jedes $m\in\mathbb{N}$ die Menge Pr_m wie folgt.

$$\mathrm{Pr}_m:=\{z^m\cdot f:f\in\mathrm{Pr}\}$$

Beachte, dass Pr_m ein Ideal ist im Ring $(\mathrm{Pr},0_K,1_K,+,\cdot)$. Insbesondere ist Pr_1 ein maximales Ideal und es gilt $\mathrm{Pr}\,/\,\mathrm{Pr}_1\cong K$.

Dass die endlichen Produkte $\prod_{l\in L}f_l\in\mathrm{Pr}$ für $L\to\infty$ gegen eine Potenzreihe $f\in\mathrm{Pr}$ konvergieren, definieren wir nun wie folgt: Es gibt eine Potenzreihe $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, sodass für jedes $m\in\mathbb{N}$ ein $L'\in\mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $L\geq L'$ gilt:

$$\left(\prod_{l\in L}f_l-\sum_{n=0}^{m}a_nz^n\right)\in\mathrm{Pr}_{m+1}$$

Wir betrachtenn folgendes Beispiel: Sei $f_l=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_{l,n}z^n$ und nehmen wir an, dass $a_{l,0}=1$ für alle $l\in\mathbb{N}$. Weiter nehmen wir an, dass die endlichen Produkte $\prod_{l\in L}f_l\in\mathrm{Pr}$ für $L\to\infty$ gegen die Potenzreihe $f=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nz^n$ konvergieren. Für den Koeffizienten a_0 gilt somit

$$a_0=\prod_{l\in\mathbb{N}}a_{l,0}=1.$$

Nun betrachten wir den Koeffizienten a_n für ein $n\geq 1$. Aus der Definition der Multiplikation von Potenzreihen folgt

$$a_n=\sum_{\varepsilon\in S_n}\prod_{l\in\mathbb{N}}a_{l,\varepsilon(l)}$$

wobei S_n die Menge aller Funktionen $\varepsilon:\mathbb{N}\to n+1$ bezeichnet mit $\sum_{l\in\mathbb{N}}\varepsilon(l)=n$. Eine sicher hinreichende Bedingung für die Existenz von a_n ist, dass nur endlich viele Produkte $\prod_{l\in\mathbb{N}}a_{l,\varepsilon(l)}$ von 0 verschieden sind. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn es nur endlich viele $l\in\mathbb{N}$ gibt, sodass $a_{l,k}\neq 0$ für ein $1\leq k\leq n$.

Um zu beweisen, dass spezielle Familien von Potenzreihen multiplizierbar sind, führen wir noch folgenden Begriff ein: Ist $g \in \mathrm{Pr} \setminus \{0\}$ und gilt für ein $m \in \mathbb{N}$, $g \in \mathrm{Pr}_m \setminus \mathrm{Pr}_{m+1}$, so sagen wir, dass die Potenzreihe g den **Minimalgrad** m besitzt, d. h. g ist von der Form $\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_m \neq 0$. Der Minimalgrad von $g \in \mathrm{Pr}$ wird mit $\deg_{\min}(g)$ bezeichnet.

PROPOSITION 11.1. *Sei* $\mathscr{F} = \{f_l \in \mathrm{Pr} : l \in \mathbb{N}\}$ *eine Familie von Potenzreihen mit folgenden Eigenschaften: Für alle* $l \in \mathbb{N}$ *ist* $f_l = 1 + g_l$ *für ein* g_l *mit* $\deg_{\min}(g_l) > 0$, *und für alle* $m \in \mathbb{N}$ *ist die Menge*

$$\{l \in \mathbb{N} : \deg_{\min}(g_l) \leq m\}$$

endlich. Dann ist $\mathscr{F}$ *eine mulitiplizierbare Familie.*

Beweis. Weil $\deg_{\min}(g_l) > 0$ ist $a_0 = \prod_{n \in \mathbb{N}} 1 = 1$. Der Beweis ist nun mit Induktion über m. Wir nehmen an, wir hätten die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_m$ (für ein $m \geq 0$) der Potenzreihe f, gegen welche $\prod_{l \in \mathbb{N}} f_l$ konvergiert, bereits bestimmt. Das heisst, es gibt ein $L' \in \mathbb{N}$, sodass für alle $L \geq L'$ gilt:

$$\left(\prod_{l \in L} f_l - \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \right) \in \mathrm{Pr}_{m+1}$$

Aus der Voraussetzung folgt, dass es für $m+1$ nur endlich viele Potenzreihen g_l gibt mit $\deg_{\min}(g_l) \leq m+1$. Sei $\sum_{n=0}^{m+1} \tilde{a}_n z^n$ das Produkt der entsprechenden Potenzreihen $f_l = 1 + g_l$ und sei $L' \in \mathbb{N}$ so, dass jedes l mit $\deg_{\min}(g_l) \leq m+1$ in L' ist. Dann gilt $\tilde{a}_n = a_n$ für alle $0 \leq n \leq m$. Weiter gilt, dass jedes endliche Produkt von Potenzreihen $f_{l'}$ mit $l' \notin L'$ in Pr_{m+2} ist. Somit gilt für alle $L \geq L'$,

$$\prod_{l \in L} f_l - \left(\sum_{n=0}^{m} a_n z^n + \tilde{a}_{m+1}\, z^{m+1} \right) \in \mathrm{Pr}_{m+2}$$

wobei für $0 \leq n \leq m$ gilt $\tilde{a}_n = a_n$. Setzen wir $a_{m+1} := \tilde{a}_{m+1}$, so ist für alle $L \geq L'$

$$\left(\prod_{l \in L} f_l - \sum_{n=0}^{m+1} a_n z^n \right) \in \mathrm{Pr}_{m+2}$$

wie gewünscht. ⊣

FORMALES ABLEITEN VON FORMALEN POTENZREIHEN

Ist $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathrm{Pr}$, so ist die formale Ableitung $D(f)$ von f definiert durch

$$D(f) := \sum_{n \in \mathbb{N}} n \cdot a_n z^{n-1}.$$

PROPOSITION 11.2. *Sind* $f, g \in \mathrm{Pr}$, *so gelten die folgenden Regeln:*

$$D(f+g) = D(f) + D(g) \quad \textit{und} \quad D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$$

Beweis. Die Regel $D(f+g) = D(f) + D(g)$ folgt unmittelbar aus der Definition von D.

Um die Regel $D(f \cdot g) = D(f) \cdot g + f \cdot D(g)$ zu verifizieren, seien $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ und $g = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$. Dann gilt für $f \cdot g = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$, $c_{n+1} = a_0 b_{n+1} + a_1 b_n + \ldots + a_n b_1 + a_{n+1} b_0$, und für $D(f \cdot g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{c}_n z^n$ erhalten wir

$$\tilde{c}_n = (n+1)\big(a_0 b_{n+1} + a_1 b_n + \ldots + a_n b_1 + a_{n+1} b_0\big).$$

Ist $D(f) \cdot g = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n z^n$ und $f \cdot D(g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n z^n$, so ist

$$\begin{array}{rcrcrcccrcl} d_n & = & a_1 b_n & + & 2a_2 b_{n-1} & + & \ldots & + & n a_n b_1 & + & (n+1)a_{n+1}b_0, \\ e_n & = & n a_1 b_n & + & (n-1)a_2 b_{n-1} & + & \ldots & + & a_n b_1 & + & (n+1)a_0 b_{n+1}, \end{array}$$

und es gilt $d_n + e_n = \tilde{c}_n$. ⊣

Ist $f \in \mathrm{Pr}$ mit $\deg_{\min}(f) = 0$, so ist die **logarithmische Ableitung** $D_{\log}(f)$ definiert durch

$$D_{\log}(f) := \frac{D(f)}{f}.$$

PROPOSITION 11.3. *Ist* $\mathscr{F} = \{f_l \in \mathrm{Pr} : l \in \mathbb{N}\}$ *eine multiplizierbare Familie mit den Eigenschaften* $f_l = 1 + g_l$ *für* $g_l \in \mathrm{Pr}_1$ *und* $\left|\{l \in \mathbb{N} : \deg_{\min}(g_l) \leq m\}\right|$ *endlich für alle* $l, m \in \mathbb{N}$, *so ist*

$$D_{\log}\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{D(f_l)}{f_l} \quad \textit{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{D(f_l)}{f_l} \in \mathrm{Pr}\,.$$

Beweis. Nach Definition von D bzw. $D_{\log}$ und mit den Eigenschaften von $\mathscr{F}$ gilt

$$D_{\log}\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l\big) = \frac{D(f_0) \cdot \prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+1} + f_0 \cdot D\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+1}\big)}{\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l} =$$

$$\frac{D(f_0)}{f_0} + \frac{f_0 \cdot D(f_1) \cdot \prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+2} + f_0 \cdot f_1 \cdot D\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+2}\big)}{\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l} =$$

$$\frac{D(f_0)}{f_0} + \frac{D(f_1)}{f_1} + \frac{f_0 \cdot f_1 \cdot D(f_2) \cdot \prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+3} + f_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot D\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_{l+3}\big)}{\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l} = \ldots$$

und wir erhalten schliesslich

$$D_{\log}\big(\prod_{l\in\mathbb{N}} f_l\big) = \frac{D(f_0)}{f_0} + \frac{D(f_1)}{f_1} + \frac{D(f_2)}{f_2} + \ldots = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{D(f_l)}{f_l}.$$

Aus $f_l = 1 + g_l$ und $\deg_{\min} g_l \geq 1$ für alle $l \in \mathbb{N}$, folgt $f_l^{-1} = \frac{1}{f_l} \in \mathrm{Pr}$. Weiter folgt aus $f_l = 1 + g_l$, dass gilt $D(f_l) = D(g_l)$, und mit $\deg_{\min}(D(g_l)) = \deg_{\min}(g_l) - 1$, erhalten wir schliesslich

$$\deg_{\min}(g_l) - 1 = \deg_{\min}\Big(\frac{D(f_l)}{f_l}\Big).$$

Weil nun die Menge $\{l \in \mathbb{N} : \deg_{\min}(g_l) \leq m\}$ endlich ist für jedes $m \in \mathbb{N}$, folgt, dass die Summe $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{D(f_l)}{f_l}$ eine formale Potenzreihe ist. ⊣

GENERIERENDE FUNKTIONEN

Im Folgenden versuchen wir eine gegebene Zahlenfolge, zum Beispiel die Folge

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$$

durch eine einfache Funktion zu generieren. Dazu betrachten wir zuerst die Zahlenfolge als Folge der Koeffizienten einer Potenzreihe. Zum Beispiel entspricht der obigen Zahlenfolge die Potenzreihe

$$\operatorname{geo}(z) = (1 + 1z + 1z^2 + 1z^3 + 1z^4 + \ldots)\,.$$

Nun suchen wir einen einfachen (d. h. endlichen) Ausdruck, welcher diese Potenzreihe, in unserem Beispiel $\operatorname{geo}(z)$, generiert. Wie wir bereits wissen gilt:

$$\operatorname{geo}(z) = \frac{1}{1-z}\,,$$

oder anders ausgedrückt:

$$\frac{1}{1-z} = (1 + 1z + 1z^2 + 1z^3 + 1z^4 + \ldots)$$

Wir sagen nun, dass die Funktion $\frac{1}{1-z}$ die Zahlenfolge $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$ **generiert**, bzw. dass $\frac{1}{1-z}$ eine **generierende Funktion** dieser Zahlenfolge ist.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Zahlenfolge

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

die wir als Koeffizienten der Potenzreihe $\operatorname{geo}(z)^2$ erkennen. Aus

$$\operatorname{geo}(z)^2 = \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-2z+z^2}$$

folgt

$$\frac{1}{1-2z+z^2} = (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + \ldots)$$

und somit wird die Zahlenfolge $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$ durch $\frac{1}{1-2z+z^2}$ generiert.

Als nächstes Beispiel betrachten wir nun die Zahlenfolge der sogenannten **Dreiecks-Zahlen**

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ \ldots$$

wobei k genau dann eine Dreieckszahl ist, wenn es eine positive natürliche Zahl n gibt, so dass gilt

$$k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\,.$$

Da nun gilt

$$\frac{1}{1-3z+3z^2-z^3} = (1 + 3z + 6z^2 + 10z^3 + 15z^4 + \ldots) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n$$

wird die Folge der Dreieckszahlen durch die Funktion $\frac{1}{1-3z+3z^2-z^3}$ generiert. Es sei hier noch erwähnt, dass gilt:

$$\frac{1}{1-3z+3z^2-z^3} = \frac{1}{(1-z)^3} = \operatorname{geo}(z)^3$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir Zahlenfolgen $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots$ welche durch folgende Vorschrift definiert werden (wobei k und l irgendwelche Zahlen sind):

$$a_0 := 1 \qquad a_1 := k \qquad a_{n+2} = k\cdot a_{n+1} + l\cdot a_n$$

Solche Zahlenfolgen heissen *rekursiv definierte Zahlenfolgen*. Für $k = l = 1$ erhalten wir zum Beispiel die Folge der **Fibonacci-Zahlen**:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

Wir zeigen nun, dass Zahlenfolgen, welche wie oben definiert sind, durch

$$\frac{1}{1 - kz - lz^2}$$

generiert werden. Anders ausgedrückt: Ist $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ eine Zahlenfolge für die gilt $a_0 = 1$, $a_1 = k$, und allgemein $a_{n+2} = k \cdot a_{n+1} + l \cdot a_n$, dann ist

$$\frac{1}{1 - kz - lz^2} = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n.$$

Um dies zu sehen, beachte, dass aus der Definition von $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 = (1 - kz - lz^2) \cdot (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots) = \\ a_0 + \underbrace{(a_1 - ka_0)}_{=0} z + \underbrace{(a_2 - ka_1 - la_0)}_{=0} z^2 + \underbrace{(a_3 - ka_2 - la_1)}_{=0} z^3 + \ldots \end{aligned}$$

Für die Fibonacci-Zahlen, also im Fall $k = l = 1$, gilt somit:

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = 1 + 1z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + \ldots$$

Als letztes Beispiel bestimmen wir eine generierende Funktion für die Folge der Quadratzahlen

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \ldots$$

Dafür beginnen wir mit der Potenzreihe

$$f = 1z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \ldots$$

und leiten diese formal ab. Wir erhalten dann

$$D(f) = 1^2 + 2^2 z + 3^2 z^2 + 4^2 z^3 + \ldots$$

und weil $f = z \cdot \mathrm{geo}(z)^2$, ist

$$D(f) = D\big(z \cdot \mathrm{geo}(z)^2\big) = \mathrm{geo}(z)^2 + z \cdot 2\,\mathrm{geo}(z) \cdot D(\mathrm{geo}(z)).$$

Weil nun $D(\mathrm{geo}(z)) = \mathrm{geo}(z)^2$, ist

$$\mathrm{geo}(z)^2 + 2z\,\mathrm{geo}(z)^3 = \mathrm{geo}(z)^2\big(1 + 2z\,\mathrm{geo}(z)\big) = \frac{1}{(1-z)^2}\Big(1 + \frac{2z}{1-z}\Big) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

die gesuchte generierende Funktion der Quadratzahlen.

Die Algebra der formalen Potenzreihen*

Sie K ein Körper und sei $K[[x]]$ die Menge der formalen Potenzreihen über K (d. h. die Menge der formalen Potenzreihen in der Unbestimmten x mit Koeffizienten in K). Dann ist $(K[[x]], 0_K, +)$ eine abelsche Gruppe und mit der Multiplikation ist somit $(K[[x]], 0_K, 1_K, +, \cdot)$ ein Ring. Da wir die Potenzreihen aus $K[[x]]$ mit Elementen aus K multiplizieren können, operiert der Körper K auf dem Ring $K[[x]]$ und somit wird $K[[x]]$ zu einer **Algebra** (d. h. ein Körper operiert auf einem Ring). Wenn wir nur die Gruppenstruktur von $K[[x]]$ betrachten, so erhalten wir einen Vektorraum (d. h. ein Körper operiert auf einer abelschen Gruppe). Dieser Vektorraum ist abzählbar unendlich (eine Basis ist zum Beispiel $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$).

*gehört nicht zum Vorlesungsstoff