2. Modelle

Syntax und Semantik

Die mathematische Logik zerfällt in *Syntax* (Theorie der Beziehungen zwischen den Zeichen) und *Semantik* (Lehre der Bedeutung der Symbole, bzw. deren Interpretation). Im Vergleich zur Musik könnte man sagen, dass die Syntax (d.h. die formale Logik) der Partitur entspricht, welche Schwarz auf Weiss festhält, welche Noten gespielt werden sollen, während die Semantik der Umsetzung einer Partitur in hörbare Musik entspricht, welche sich zwar an die Partitur halten muss, in der Interpretation der Partitur aber frei ist. Obwohl die ganze Musik schon in der Partitur enthalten ist, so wird sie doch erst durch die Interpretation mit Leben erfüllt. Nehmen wir zum Beispiel als "Partitur" die Gruppenaxiome, so erhalten auch diese erst durch das betrachten konkreter Gruppen (d.h. erst durch die Interpretation) ihre Bedeutung. Bevor wir Terme und Formeln interpretieren und Modelle für axiomatische Theorien konstruieren, werden im Folgenden ein paar Parallelen zwischen der syntaktischen und der semantischen Ebene der Mathematik aufgezeigt.

Syntaktische Ebene

Terme. Das sind Zeichenketten, welche nach den formalen Regeln (T0)–(T2) aufgebaut werden. Zum Beispiel ist das Konstantensymbol $\mathtt{e}$ der Gruppentheorie ein Term.

Formeln. Das sind Zeichenketten, welche nach den formalen Regeln (F0)–(F4) aufgebaut werden. Formeln sind weder wahr noch falsch; auf der syntaktischen Ebene gibt es keinen Wahrheitsbegriff!

Logische Axiome. Das sind Formeln, genauer Formelschemata, aus denen, mit Hilfe von Schlussregeln, weitere Formeln hergeleitet werden können.

Nicht-logische Axiome. Das sind Formeln (bzw. Formelschemata) welche nicht-logische Symbole enthalten, aus denen, mit Hilfe von Schlussregeln, weitere Formeln hergeleitet werden können. Zum Beispiel sind die Gruppenaxiome, welche die nicht-logischen Symbole $\mathtt{e}$ und $\circ$ enthalten, nicht-logische Axiome.

Semantische Ebene

Objekte. Terme sind Namen für Objekte. Durch die Interpretation wird ein Term (Name) zu dem Objekt, welches er bezeichnet. Zum Beispiel wird das Konstantensymbol $\mathtt{e}$ durch die Interpretation zum Neutralelement e einer Gruppe, e ist also ein Objekt.

Aussagen. Wird eine Formel interpretiert, so wird sie zu einer konkreten Aussage über bestimmte Objekte die entweder wahr oder falsch ist; und zwar unabhängig davon, ob wir ihren Wahrheitswert kennen.

Tautologien. Egal wie wir ein logisches Axiom interpretieren, die Aussage die wir erhalten ist immer wahr, eine sogenannte *Tautologie*. Die logischen Axiome sind so gewählt, dass aus ihnen alle Tautologien hergeleitet werden können.

Axiomensystem einer Theorie. Das sind Axiome (d.h. Grundaussagen), welche am Anfang einer Theorie (z.B. Gruppentheorie) stehen. Die nicht-logischen Symbole werden dann in einem Modell der Theorie so interpretiert, dass alle Axiome wahr werden.

In der Mathematik sind wir nur in der formalen Logik auf der syntaktischen Ebene. Ansonsten arbeiten wir immer auf der semantischen Ebene. Selbst wenn wir zum Beispiel eine allgemeine Gruppe untersuchen, besteht diese Gruppe in unserer Vorstellung aus Elementen, also aus Objekten, wobei auf der Menge der Objekte eine konkrete binäre Operation (mit gewissen Eigenschaften) definiert ist. Sogar wenn wir mathematische Beweise führen, bleiben wir auf der semantischen Ebene – wir können aber (wie wir später sehen werden) jeden richtigen mathematischen Beweis in einen formalen Beweis der syntaktischen Ebene übersetzen, dessen Korrektheit ein Computer überprüfen kann. Obwohl mathematische Theorien (wie z.B. die Gruppentheorie) üblicherweise auf nicht-logischen Axiomen beruhen, wird der Übergang von der syntaktischen Ebene der nicht-logischen Axiome (z.B. der Gruppenaxiome) auf die semantische Ebene (z.B. der konkreten Gruppen) im Allgemeinen nicht vollzogen. In der Gruppentheorie mag dies noch statthaft sein, denn wir können Modelle von endlichen Gruppen effektiv angeben. Wesentlich anders ist es aber bei der Mengenlehre oder der Peano-Arithmetik, denn es gibt kein umfassendes System, in welchem ein Modell der Mengenlehre oder der Peano-Arithmetik existiert.

Strukturen, Interpretationen, Modelle

Sei $\mathscr{L}$ eine beliebige, aber festgelegte Signatur. Eine **$\mathscr{L}$-Struktur** $\mathbf{M}$ besteht aus einer nichtleeren Menge A, dem sogenannten **Bereich** von $\mathbf{M}$, zusammen mit einer Abbildung, welche jedem Konstantensymbol $c \in \mathscr{L}$ ein Element $c^{\mathbf{M}} \in A$ zuordnet, jedem n-stelligen Relationssymbol $R \in \mathscr{L}$ eine Menge von n-Tupeln $R^{\mathbf{M}} \subseteq A^n$ zuordnet, und jedem n-stelligen Funktionssymbol $F \in \mathscr{L}$ eine Funktion $F^{\mathbf{M}} : A^n \to A$ zuordnet.

Um auch Variablen zu interpretieren, definieren wir sogenannte Variablenbelegungen: Eine **Variablenbelegung *j*** in einer $\mathscr{L}$-Struktur $\mathbf{M}$ mit Bereich A, ist eine Abbildung, welche jeder Variablen ν ein Objekt $j(\nu) \in A$ zuordnet. Für eine Variable ν, ein Objekt $a \in A$ und eine Variablenbelegung j einer $\mathscr{L}$-Struktur $\mathbf{M}$ mit Bereich A, definieren wir zudem die Variablenbelegung $j\frac{a}{\nu}$ wie folgt:

$$j\tfrac{a}{\nu}(\nu') = \begin{cases} a & \text{falls } \nu' \equiv \nu, \\ j(\nu') & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine **$\mathscr{L}$-Interpretation** $\mathbf{I}$ ist ein Paar $(\mathbf{M}, j)$ das aus einer $\mathscr{L}$-Struktur $\mathbf{M}$ und einer Variablenbelegung j in $\mathbf{M}$ besteht.

Für eine Interpretation $\mathbf{I} = (\mathbf{M}, j)$ und ein Objekt $a \in A$ definieren wir:

$$\mathbf{I}\tfrac{a}{\nu} := \left(\mathbf{M}, j\tfrac{a}{\nu}\right)$$

Bezüglich einer $\mathscr{L}$-Interpretation $\mathbf{I} = (\mathbf{M}, j)$, wobei A der Bereich von $\mathbf{M}$ ist, ordnen wir jedem $\mathscr{L}$-Term τ ein Objekt $\mathbf{I}(\tau) \in A$ wie folgt zu:

- Für Variablen ν sei $\mathbf{I}(\nu) := j(\nu)$.
- Für Konstantensymbole $c \in \mathscr{L}$ sei $\mathbf{I}(c) := c^{\mathbf{M}}$.
- Für ein n-stelliges Funktionssymbol $F \in \mathscr{L}$ und $\mathscr{L}$-Terme $\tau_1, \ldots, \tau_n$, sei

$$\mathbf{I}\big(F\tau_1 \cdots \tau_n\big) := F^{\mathbf{M}}\big(\mathbf{I}(\tau_1), \ldots, \mathbf{I}(\tau_n)\big)\,.$$

Nun sind wir in der Lage, mit $\mathscr{L}$-Interpretationen auch Formeln zu interpretieren. Mehr noch, wir können sogar definieren, wann eine Formel φ bezüglich einer bestimmten Interpretation $\mathbf{I}$ wahr ist, bzw. wann eine Formel φ in $\mathbf{I}$ gilt – was wir mit $\mathbf{I} \models \varphi$ bezeichnen.

Ist φ eine Formel, so ist sie aus den Regeln (F0)–(F4) entstanden, d.h. φ ist von der Form $\tau_1 = \tau_2$, $R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\neg\psi$, $\psi_1 \wedge \psi_2$, $\psi_1 \vee \psi_2$, $\psi_1 \rightarrow \psi_2$, $\exists\nu\psi$ oder $\forall\nu\psi$. Wir definieren nun $\mathbf{I} \models \varphi$ wie folgt:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{I} \models \tau_1 = \tau_2 & \iff & \mathbf{I}(\tau_1) \text{ IST DASSELBE OBJEKT WIE } \mathbf{I}(\tau_2) \\
\mathbf{I} \models R(\tau_1, \ldots, \tau_n) & \iff & \big(\mathbf{I}(\tau_1), \ldots, \mathbf{I}(\tau_n)\big) \text{ IST EIN ELEMENT DER MENGE } R^{\mathbf{M}} \\
\mathbf{I} \models \neg\psi & \iff & \text{NICHT } \mathbf{I} \models \psi \\
\mathbf{I} \models \psi_1 \wedge \psi_2 & \iff & \mathbf{I} \models \psi_1 \text{ UND } \mathbf{I} \models \psi_2 \\
\mathbf{I} \models \psi_1 \vee \psi_2 & \iff & \mathbf{I} \models \psi_1 \text{ ODER } \mathbf{I} \models \psi_2 \\
\mathbf{I} \models \psi_1 \rightarrow \psi_2 & \iff & \text{FALLS } \mathbf{I} \models \psi_1 \text{ DANN } \mathbf{I} \models \psi_2 \\
\mathbf{I} \models \exists\nu\psi & \iff & \text{ES EXISTIERT EIN } a \text{ IN } A \text{ MIT } \mathbf{I}\tfrac{a}{\nu} \models \psi \\
\mathbf{I} \models \forall\nu\psi & \iff & \text{FÜR ALLE } a \text{ IN } A \text{ GILT } \mathbf{I}\tfrac{a}{\nu} \models \psi
\end{array}
$$

Beachte, dass für jede $\mathscr{L}$-Interpretation $\mathbf{I}$ und für jede $\mathscr{L}$-Formel φ gilt:

$$\textit{entweder} \quad \mathbf{I} \models \varphi \quad \textit{oder} \quad \mathbf{I} \models \neg\varphi\,.$$

Mit anderen Worten, entweder ist eine Formel in einer Interpretation wahr, d.h. $\mathbf{I} \models \varphi$, oder die Formel ist nicht wahr bzw. falsch, d.h. $\mathbf{I} \not\models \varphi$, dann ist ihre Negation $\neg\varphi$ wahr, d.h. $\mathbf{I} \models \neg\varphi$

Sei nun $\mathscr{L}$ eine beliebige Signatur, φ eine $\mathscr{L}$-Formel und $\mathbf{M}$ eine $\mathscr{L}$-Struktur. Dann ist $\mathbf{M}$ **ein Modell von $\boldsymbol{\varphi}$**, in Zeichen $\mathbf{M} \models \varphi$, falls für *jede* Variablenbelegung j gilt: $(\mathbf{M}, j) \models \varphi$. Ist $\mathbf{\Phi}$ eine Menge von $\mathscr{L}$-Formeln, dann ist $\mathbf{M}$ **ein Modell von $\mathbf{\Phi}$**, in Zeichen $\mathbf{M} \models \mathbf{\Phi}$, falls für jede Formel $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ gilt: $\mathbf{M} \models \varphi$.

Zum Beispiel sei $\mathscr{L} = \{\mathtt{c}, f\}$, wobei $\mathtt{c}$ ein Konstantensymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol ist. Weiter sei $\mathbf{\Phi}$ die Menge, welche aus folgenden beiden $\mathscr{L}$-Sätzen besteht:

$$\underbrace{\forall x\big(x = \mathtt{c} \vee x = f(\mathtt{c})\big)}_{\varphi_1} \quad \text{und} \quad \underbrace{\exists x(x \neq \mathtt{c})}_{\varphi_2}$$

Wir konstruieren nun zwei Modelle $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ (bzw. zwei $\mathscr{L}$-Strukturen) mit demselben Bereich A, so dass $\mathbf{M}_1 \models \mathbf{\Phi}$ und $\mathbf{M}_2 \not\models \mathbf{\Phi}$: Zuerst wählen wir $A := \{0, 1\}$ und definieren

$$\mathtt{c}^{\mathbf{M}_1} := 0, \quad f^{\mathbf{M}_1}(0) := 1, \quad f^{\mathbf{M}_1}(1) := 0,$$

$$\mathtt{c}^{\mathbf{M}_2} := 0, \quad f^{\mathbf{M}_2}(0) := 0, \quad f^{\mathbf{M}_2}(1) := 1.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass der Satz φ_2 in beiden Modellen gilt, wohingegen φ_1 nur im Modell $\mathbf{M}_1$ gilt. Insbesonder haben wir $\mathbf{M}_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ und $\mathbf{M}_2 \models \neg\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

DER KORREKTHEITSSATZ

Der Korrektheitssatz besagt, dass jeder Satz, welche aus einer Menge T von Sätzen beweisbar ist, in jedem Modell von T wahr ist.

KORREKTHEITSSATZ. *Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur, sei T eine Menge von $\mathscr{L}$-Sätzen, sei σ ein $\mathscr{L}$-Satz, der aus T beweisbar ist (d.h. $T \vdash \sigma$), und sei M ein beliebiges Modell von T (d.h. $\mathrm{M} \models T$). Dann gilt $\mathrm{M} \models \sigma$.*

Begründung. Sowohl die logischen Axiome als auch die Sätze aus T sind wahr in jedem Modell $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$, und mit den Schlussregeln erhalten wir aus wahren Formeln immer wahre Formeln. Somit ist auch die letzte Formel σ eines formalen Beweises wahr in M, d.h. es gilt $\mathrm{M} \models \sigma$.
Folgerung.

- Ist σ ein Satz und gilt $\mathsf{T} \vdash \sigma$, dann gilt für jedes Modell $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$, $\mathrm{M} \models \sigma$.

  Begründung. Hätten wir ein Model $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$, in dem σ nicht gilt, so hätten wir $\mathrm{M} \models \neg\sigma$, was aber dem Korrektheitssatz widerspricht.

DER GÖDEL'SCHE VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ

Eine Menge T von Sätzen heisst **konsistent** (oder **widerspruchsfrei**), falls es keine Formel φ gibt mit $\mathsf{T} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Ist T nicht konsistent so heisst T **inkonsistent**. Aus Aufgabe 0.(f) folgt, dass für eine inkonsistente Theorie T gilt: $\mathsf{T} \vdash \psi$ für jede Formel ψ.

Der Gödel'sche Vollständigkeitssatz besagt nun, dass jede konsistente Menge von Sätzen ein Modell besitzt. Etwas allgemeiner formuliert besagt der Gödel'sche Vollständigkeitssatz folgendes:

GÖDEL'SCHER VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ. *Sei $\mathscr{L}$ eine Signatur, sei T eine Menge von $\mathscr{L}$-Sätzen, und sei σ ein $\mathscr{L}$-Satz mit $T \nvdash \sigma$ (d.h. T ist konsistent). Dann existiert ein Modell $\mathrm{M} \models T$ mit $\mathrm{M} \models \neg\sigma$.*

Folgerungen.

- Ist T eine konsistente Menge von Sätzen, so hat T ein Modell.

  Begründung. Ist T konsistent, so existiert ein Satz σ, der nicht aus T beweisbar ist, d.h. $\mathsf{T} \nvdash \sigma$, und somit existiert auch ein Model $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$.

- Ist σ ein Satz und gilt für jedes Modell $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$, $\mathrm{M} \models \sigma$, dann gilt $\mathsf{T} \vdash \sigma$.

  Begründung. Hätten wir $\mathsf{T} \nvdash \sigma$, so gäbe es ein Model $\mathrm{M} \models \mathsf{T}$ mit $\mathrm{M} \models \neg\sigma$.

- Ist σ ein Satz und gilt $\mathsf{T} \nvdash \sigma$ und $\mathsf{T} \nvdash \neg\sigma$, so existieren zwei Modelle $\mathrm{M}_1 \models \mathsf{T}$ und $\mathrm{M}_2 \models \mathsf{T}$ mit $\mathrm{M}_1 \models \neg\sigma$ und $\mathrm{M}_2 \models \sigma$.

  Begründung. Mit $\mathsf{T} \nvdash \sigma$ gibt es ein Modell $\mathrm{M}_1 \models \mathsf{T} + \neg\sigma$, und mit $\mathsf{T} \nvdash \neg\sigma$ gibt es ein Modell $\mathrm{M}_2 \models \mathsf{T} + \sigma$.

- Zusammen mit dem Korrektheitssatz erhalten wir schliesslich folgende Aussage:

  > *Ein Satz σ ist genau dann aus einer Menge von Sätzen T formal beweisbar, wenn σ in jedem Modell von T gilt.*

BEMERKUNGEN ZU MATHEMATISCHEN BEWEISEN

Um zu zeigen, dass ein Satz σ aus einem Axiomensystem T beweisbar ist, führen wir üblicherweise keine formalen Beweise, sondern benutzen den Gödel'schen Vollständigkeitssatz und zeigen, dass in jedem Modell von T der Satz σ gilt (d.h. wahr ist). Mit dem Gödel'schen Vollständigkeitssatz ist dann der Satz σ aus dem Axiomensystem T formal beweisbar. Dieses Vorgehen ist ein *mathematischer Beweis* von σ aus T.

Wenn wir zum Beispiel aus den Axiomen der Gruppentheorie GT einen Satz σ zeigen wollen, so gehen wir wie folgt vor: Wir nehmen irgend ein Modell von GT, also irgend eine Gruppe $(G, \mathsf{e}, \circ)$, und zeigen, dass der Satz σ in $(G, \mathsf{e}, \circ)$ gilt, d.h. $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \sigma$.

Ist zum Beispiel $\sigma \equiv \forall x \forall y \big(y \circ x = \mathsf{e} \ \rightarrow\ x \circ y = \mathsf{e}\big)$, so nehmen wir irgend eine Gruppe $(G, \mathsf{e}, \circ)$ und irgend ein Element $x \in G$, und zeigen, dass jedes links-Inverse von x auch rechts-Inverses von x ist:

- Weil $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \mathsf{GT}_2$, existiert zu jedem Element in G ein links-inverses Element. Sei nun $x \in G$, sei $\bar{x} \in G$ ein link-Inverses von x und sei $\bar{\bar{x}} \in G$ ein links-inverses von $\bar{x}$. In $(G, \mathsf{e}, \circ)$ gilt somit
$$\bar{\bar{x}} \circ \bar{x} = \mathsf{e} \quad \text{und} \quad \bar{x} \circ x = \mathsf{e}.$$
- Weil $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \mathsf{GT}_1$, gilt in $(G, \mathsf{e}, \circ)$ auch
$$x \circ \bar{x} = \mathsf{e} \circ (x \circ \bar{x}) = (\bar{\bar{x}} \circ \bar{x}) \circ (x \circ \bar{x}).$$
- Weil $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \mathsf{GT}_0$, gilt in $(G, \mathsf{e}, \circ)$ auch
$$(\bar{\bar{x}} \circ \bar{x}) \circ (x \circ \bar{x}) = \bar{\bar{x}} \circ \big(\bar{x} \circ (x \circ \bar{x})\big) = \bar{\bar{x}} \circ \big((\bar{x} \circ x) \circ \bar{x}\big) = \bar{\bar{x}} \circ (\mathsf{e} \circ \bar{x}).$$
- Weil $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \mathsf{GT}_1$, gilt in $(G, \mathsf{e}, \circ)$ auch
$$\bar{\bar{x}} \circ (\mathsf{e} \circ \bar{x}) = \bar{\bar{x}} \circ \bar{x} = \mathsf{e},$$
und somit gilt $x \circ \bar{x} = \mathsf{e}$ in $(G, \mathsf{e}, \circ)$.
- Weil nun die Gruppe $(G, \mathsf{e}, \circ)$ und das Element $x \in G$ beliebig waren, gilt in jeder Gruppe $(G, \mathsf{e}, \circ) \models \mathsf{GT}$, das jedes links-inverse eines beliebigen Elements $x \in G$ auch rechts-inverses von x ist.

Beachte, dass wir in diesem mathematischen Beweis nur über die Wahrheit von Aussagen im Modell $(G, \mathsf{e}, \circ)$ argumentiert haben. Insbesondere haben wir die Axiome der Gruppentheorie – und implizit die logischen Axiome – nicht dazu benutzt, logische Schlüsse zu ziehen, sondern nur um zu zeigen, dass bestimmte Aussagen in $(G, \mathsf{e}, \circ)$ wahr sind.

Ein mathematischer Beweis benutzt also immer implizit den Gödel'schen Vollständigkeitssatz. Es ist natürlich auch möglich, dass ein gewisser Satz σ in machen Modellen einer Theorie T wahr und in anderen Modellen falsch ist. Seien zum Beispiel $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ zwei Modelle von T und sei σ ein Satz für den gilt $\mathbf{M}_1 \models \sigma$ und $\mathbf{M}_2 \not\models \sigma$, d.h. $\mathbf{M}_2 \models \neg\sigma$. Dann folgt aus dem Korrektheitssatz, dass gilt: $\mathsf{T} \nvdash \sigma$ und $\mathsf{T} \nvdash \neg\sigma$. Ein Satz σ, der aus einer Theorie T weder beweisbar noch widerlegbar ist, ist **unabhängig** von T. Für die Theorie GT ist zum Beispiel $\sigma \equiv \forall x \forall y (x \circ y = y \circ x)$ ein solcher Satz. Beachte, ist σ unabhängig von T, so ist sowohl $\mathsf{T} + \sigma$ wie auch $\mathsf{T} + \neg\sigma$ konsistent; insbesondere hat sowohl $\mathsf{T} + \sigma$ wie auch $\mathsf{T} + \neg\sigma$ ein Modell.